

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a XI - a – secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Problema 1. (20 puncte)

a) Fie $A = A(x)$ și $B = A(y)$, unde x, y numere reale. Atunci:

$$AB = A(x) A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix} \text{ care aparține mulțimii } G$$

deoarece oricare ar fi două numere reale x și y rezultă că $2xy$ este număr real5p

b) Fie $A = A(x)$ și $E = A(e)$, unde $e \in \mathbb{R}$. Atunci, folosind rezultatul de la a),

$$AE = A(x)A(e) = A(2xe). \text{ Din } A(2xe) = A(x) \text{ rezultă că } e = \frac{1}{2} \text{ și deci } E = A\left(\frac{1}{2}\right) \text{5p}$$

c) Calculând puteri ale matricei $A(x)$ cu x număr real, avem: $A^2(x) = A(2x^2)$, $A^3(x) = A(4x^3)$, $A^4(x) = A(8x^4)$ și aplicând inducția matematică presupunem că $A^n(x) = A(2^{n-1}x^n)$ și verificăm ipoteza calculând5p

$A^{n+1}(x) = A^n(x)A(x) = A(2^{n-1}x^n)A(x) = A(2^n x^{n+1})$, unde se poate aplica rezultatul de la a).

Deci $A^n(x) = A(2^{n-1}x^n)$ și egalând cu $A(2^{2025}x^{2026})$, rezultă că $n=2026$5p

Problema 2. (20 puncte)

a. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $\det(A) = 8 - 8 = 0$5p

b. M I. Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = I_3 \Rightarrow \det(A^n) = \det(I_3)$ 10p

$$\det(A)^n = 1 \Leftrightarrow 0^n = 1(F) \text{5p}$$

sau M II. $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,5p

și se demonstrează prin inducție că

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-4)^n & 0 & \frac{1}{2}(-4)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ \frac{1}{2}(-4)^n & 0 & \frac{1}{2}(-4)^n \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, \text{ deci } A^n \neq I_3, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{15p}$$

Problema 3. (20 puncte)

$$1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x(a+1)}{x-1} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \begin{cases} \infty + 1, a > -1 \\ 1, a = -1 \\ -\infty, a < -1 \end{cases}, \text{ deci pentru ca limita}$$

să fie reală trebuie ca $a = -1$10p

b. Pentru $a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x(x-1)+x}{x-1} = e^x + \frac{x}{x-1}$ 5p

Atunci $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{x}{x-1} \right) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală către $-\infty$.5p

Problema 4. (30 puncte)

$\det A = a_2 a_3 + a_1 b_1 b_2$,5p

deci $|\det A| = |a_2 a_3 + a_1 b_1 b_2| = 1$, care oricare ar fi b_1 și b_2 întregi conduce la $a_1 = 0$,10p

deci $|a_2 a_3| = 1$ 5p

și tripletele cerute sunt: $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, -1)$ 10p