

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a VII a

02.02.2026

Olimpiada de matematică - Faza locală

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. (20 p) Fie numerele $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ și

$$b = (|3^{51} - 2^{85}| + 3^{2011} \cdot 81^{490}) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8 - 5\sqrt{3})^2 - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}}$$

a) Compară numerele a și b.

b) Verifică dacă mulțimea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ conține elementele } 3a \text{ și } \sqrt{b}.$$

G.M. Nr.9/2025 ,Supliment

Soluție:

a) $a = \frac{2}{3}$ 3p

$$3^{51} = (3^2)^{17} = 9^{17}$$

$$2^{85} = (2^5)^{17} = 32^{17} \Rightarrow 2^{85} > 3^{51} \text{ 3p}$$

$$b = 36 \text{3p}$$

$$b > a \text{1p}$$

b) $2x-5/2x-5$

$$2x-5/3x+1 \Rightarrow 2x-5/17 \text{ 4p}$$

$$D_{17} = \{ 1; -1; 17; -17 \} \text{ 1p}$$

$$A = \{ 3; 2; 11; -6 \} \text{1p}$$

$$3a = 2 \text{1p}$$

$$2 \in A \text{1p}$$

$$\sqrt{b} = 6 \text{1p}$$

$$\sqrt{b} \notin A \text{1p}$$

2. (20 p) . Fie $A = \{ n \in \mathbb{N}^* / 1 < \sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2 \}$

a) Enumerați elementele mulțimii A

b) Determinați $n \in A$, astfel încât $\sqrt{n} \cdot |1 - \sqrt{1 + \sqrt{n}}| < 1$

- a) $1 < \sqrt{1+\sqrt{n}} < 2 \Leftrightarrow 1 < 1+\sqrt{n} < 4 \dots\dots\dots 3p$
 $0 < \sqrt{n} < 3 \Leftrightarrow 0 < n < 9 \dots\dots\dots 3p$
 $n \in N^* \Rightarrow n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \dots\dots\dots 2p$
 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \dots\dots\dots 2p$
- b) $1 < \sqrt{1+\sqrt{n}} \Rightarrow 1 - \sqrt{1+\sqrt{n}} < 0 \mid 1 - \sqrt{1+\sqrt{n}} = \sqrt{1+\sqrt{n}} - 1 \dots\dots\dots 1p$
 $\sqrt{n} (\sqrt{1+\sqrt{n}} - 1) < 1$
 $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{n}} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{n} < \frac{\sqrt{1+\sqrt{n}} + 1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n < \sqrt{1+\sqrt{n}} + 1 \Leftrightarrow (n-1)^2 < 1 + \sqrt{n} \dots\dots\dots 1p$
 $n=1 \Rightarrow 0 < 1$ adevarat $\dots\dots\dots 1p$
 $n=2 \Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \sqrt{2}$ adevarat $\dots\dots\dots 1p$
 $n=3$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$
 $n=4$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$
 $n=5$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$
 $n=6$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$
 $n=7$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$
 $n=8$ nu convine $\dots\dots\dots 1p$

3. (25 p) . Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$, $D \in BC$. În exteriorul triunghiului ABC construim pătratul BCEF . Știind că AE este bisectoarea unghiului DAC , aflați măsura unghiului BAE.

$$AE \text{ bis } \angle DAC \Rightarrow \angle DAE \equiv \angle CAE \text{ (1)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \angle DAC = 2\angle DAE$$

$$AD \cap FE = \{P\}$$

$$AD \perp BC$$

$$BC \parallel FE \Rightarrow AP \perp FE$$

$$\text{Dar } CE \perp FE \Rightarrow CE \parallel AP \dots\dots\dots 3p$$

$$\angle DAE \equiv \angle AEC \text{ (alt.int.) (2)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \angle CAE \equiv \angle AEC \Rightarrow \triangle CAE \text{ isoscel} \Rightarrow AC \equiv CE \dots\dots\dots 2p$$

$$ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow BC \equiv CE \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow AC \equiv CB \Rightarrow \triangle ABC \text{ isoscel} \Rightarrow \angle CAB \equiv \angle CBA \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \angle CBA = \angle CAD + \angle DAB \Rightarrow \angle CBA = 2\angle EAD + \angle DAB \text{ (1)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle CAD + \angle DAB + \angle CAD + \angle DAB + 90^\circ - \angle CAD = 180^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$2\angle DAB + \angle CAD = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$2\angle DAB + 2\angle DAE = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle DAB + \angle DAE = 45^\circ \Rightarrow \angle BAE = 45^\circ \dots\dots\dots 2p$$

4. (25 p) . În patrulaterul convex ABCD , $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAD = 150^\circ$ iar triunghiul ADC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AC. Calculați măsura unghiului $\angle BDC$.

$$\triangle ADC \text{ dreptunghic isoscel} \Rightarrow DA \equiv DC \text{ (} DA=DC=1 \text{)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle DCA = \angle CAD = 45^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\overset{TP}{\Rightarrow} DA^2 + DC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow AC = l\sqrt{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle BAD = 150^\circ$$

$$\angle CAD = 45^\circ \Rightarrow \angle BAC = 105^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\angle BCA = 30^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Construim } CE \perp BC \Rightarrow \angle AEC = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle CAE$$

$$\angle AEC = 90^\circ$$

$$\angle ACE = 30^\circ \xrightarrow{T \angle 30} AE = \frac{AC}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\triangle BAE$$

$$\angle AEB = 90^\circ$$

$$\angle EBA = 45^\circ \Rightarrow \triangle BAE \text{ dreptunghic isoscel} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow BE = AE = \frac{l\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\triangle BAE$$

$$\angle AEB = 90^\circ \xrightarrow{TP} AB = l \dots\dots\dots 2p$$

$$AB = AD = l \Rightarrow \triangle BAD \text{ isoscel} \Rightarrow \angle ABD = \angle BDA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ \dots\dots 2p$$

$$\angle BDC = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \dots\dots\dots 4p$$