



Olimpiada Națională de Matematică 2026  
Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026  
Clasa a X-a

Barem de notare și evaluare

Se acordă **10 puncte** din oficiu.

**Problema 1.**

Demonstrați că

a)  $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = 2$ ;

b)  $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} + \dots + \sqrt[3]{6} < 2$ , unde avem  $n$  radicali,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ .

**Soluție:**

a) Fie $x = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ . Prin ridicare la puterea a treia obținem $x^3 = 20 - 6x$ . $x^3 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 10) = 0$ . Cum $x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , avem $x^3 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ . Așadar, $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = 2$ .	<b>6p</b>
b) Demonstrăm, prin inducție, propoziția: $P(n): \underbrace{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} + \dots + \sqrt[3]{6}}_{n \text{ radicali}} < 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . $P(2): \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} < 2 \Leftrightarrow 6 + \sqrt[3]{6} < 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6} < 2 \Leftrightarrow 6 < 8$ , adevărat. Presupunem $P(k)$ adevărată, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, k$ fixat arbitrar. Deoarece $6 + \underbrace{\sqrt[3]{6} + \dots + \sqrt[3]{6}}_{k \text{ radicali}} < 6 + 2 = 8$ , avem $\underbrace{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6} + \dots + \sqrt[3]{6}}_{k+1 \text{ radicali}} < \sqrt[3]{8} = 2$ , deci $P(k+1)$ este adevărată. Prin urmare, $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .	<b>10p</b>

**Problema 2.**

Demonstrați că  $\left| \frac{6z-i}{2+3iz} \right| \leq 1$  dacă și numai dacă  $|z| \leq \frac{1}{3}$ , unde  $i$  este unitatea imaginară și  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2i}{3} \right\}$ .

**Soluție:**

$\left  \frac{6z-i}{2+3iz} \right  \leq 1 \Leftrightarrow  6z-i  \leq  2+3iz  \Leftrightarrow  6z-i ^2 \leq  2+3iz ^2 \Leftrightarrow$	<b>6p</b>
$(6z-i)(6\bar{z}+i) \leq (2+3iz)(2-3i\bar{z}) \Leftrightarrow$	<b>6p</b>
$z\bar{z} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow  z ^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow  z  \leq \frac{1}{3}$	<b>10p</b>

**Problema 3.** Determinați toate funcțiile  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică simultan următoarele condiții:

(1)  $f(x) \leq \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$ ;

(2)  $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)$ .

**Soluție:**

Fie $f$ o funcție care îndeplinește condițiile din enunț. Demonstrăm că $f(x) = \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$ . Prin reducere la absurd, presupunem că există $x_0 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_0) \neq \ln x_0$ . Conform condiției (1), rezultă că $f(x_0) < \ln x_0$ .	<b>7p</b>
---	-----------

<p>Luând <math>y = x_0</math> în condiția (2), obținem <math>f(xx_0) \leq f(x) + f(x_0) &lt; \ln x + \ln x_0 = \ln(xx_0)</math>, <math>\forall x \in (0, +\infty)</math>, de unde înlocuind pe <math>x</math> cu <math>\frac{x}{x_0}</math> deducem că (3) <math>f(x) &lt; \ln x</math>, <math>\forall x \in (0, +\infty)</math>.</p> <p>Luând <math>x = y = 1</math> în relația (2), rezultă <math>f(1) \leq f(1) + f(1)</math>, deci <math>f(1) \geq 0</math> și luând <math>x = 1</math> în relația (3) obținem <math>f(1) &lt; \ln 1 = 0</math>, relații care se contrazic.</p> <p>Deci, presupunerea că există <math>x_0 \in (0, +\infty)</math> astfel încât <math>f(x_0) \neq \ln x_0</math> este falsă.</p> <p>Prin urmare, <math>f(x) = \ln x</math>, <math>\forall x \in (0, +\infty)</math>, funcție care verifică toate condițiile cerute.</p>	<p>7p</p> <p>9p</p>
--	---------------------

**Problema 4.** Se consideră un triunghi  $ABC$  și un sistem de coordonate  $xOy$ , cu originea în centrul cercului circumscriș acestui triunghi.

- a) Demonstrați că ortocentrul  $H$  al triunghiului  $ABC$  are afixul  $h = a + b + c$ , unde  $a, b, c$  sunt afixele vârfurilor  $A, B, C$  (în raport cu sistemul  $xOy$  considerat).
- b) Fie  $S$  cercul circumscriș triunghiului  $ABC$  și  $S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}$  cercurile simetrice cercului  $S$  față de dreptele  $AB, BC$ , respectiv  $CA$ . Demonstrați că cercurile  $S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}$  au un punct comun.

**Soluție:**

<p>a) Punctul diametral opus lui <math>A</math> în cercul circumscriș triunghiului <math>ABC</math> îl notăm cu <math>A'</math> și are afixul <math>-a</math>. Deoarece <math>BH \perp AC</math> și <math>A'C \perp AC</math>, rezultă <math>BH \parallel A'C</math>. Analog <math>CH \parallel A'B</math>. Rezultă că <math>A'BHC</math> este paralelogram, deci segmentele <math>BC</math> și <math>A'H</math> au același mijloc <math>M</math>. Obținem <math>h - a = b + c</math>, deci <math>h = a + b + c</math>.</p>	<p>11p</p>
<p>b) Dacă cercurile <math>S</math> și <math>S_{BC}</math> sunt simetrice față de latura <math>BC</math>, iar <math>O</math> și <math>O_1</math> sunt respectiv centrele lor, atunci <math>OBO_1C</math> este romb, deci <math>0 + o_1 = b + c</math>, <math>o_1</math> fiind afixul punctului <math>O_1</math>. Prin urmare, <math>o_1 = b + c</math>. Analog, centrele cercurilor <math>S_{CA}</math> și <math>S_{AB}</math>, punctele <math>O_2</math> și <math>O_3</math>, au afixe <math>o_2 = a + c</math>, respectiv <math>o_3 = a + b</math>. Trebuie să găsim un punct <math>P(p)</math> egal depărtat de <math>O_1, O_2, O_3</math>, adică (1) <math> p - (b + c)  =  p - (a + c)  =  p - (a + b) </math>. Observăm că ortocentrul triunghiului <math>ABC</math>, <math>H(a + b + c)</math>, verifică relația (1). Deci cercurile <math>S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}</math> au punctul comun <math>P = H</math>.</p>	<p>12p</p>