

A 76-a olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 14 februarie 2026
Clasa a VIII-a –Soluții și bareme

Problema 1.

Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 3 \right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3\}$.

a) Determinați mulțimile $A \cap B$ și $A \cup B$.

b) Arătați că numărul $a = \frac{\sqrt{3}+8}{2}$ aparține mulțimii B .

Soluție

a) $-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4$, deci $A = [-2, 4]$ **2p**

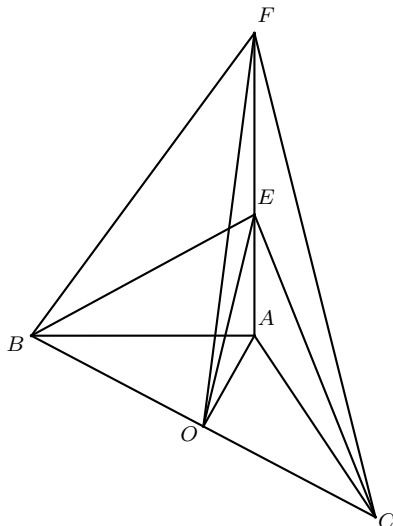
$|x-2| \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5$, deci $B = [-1, 5]$ **2p**

$A \cap B = [-1, 4]$, $A \cup B = [-2, 5]$ **1p**

b) $a = \frac{\sqrt{3}+8}{2} \in B \iff -1 \leq \frac{\sqrt{3}+8}{2} \leq 5 \iff -10 \leq \sqrt{3} \leq 2 \iff -\sqrt{100} \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{4}$, relație adevărată **2p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm. Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în punctul A , pe care se consideră punctele E și F de aceeași parte a planului ABC , astfel încât $AE = 4\sqrt{3}$ cm și $AF = 4\sqrt{15}$ cm. Arătați că aria triunghiului EBC este media geometrică a ariilor triunghiurilor ABC și FBC .

Soluție



$$AE = 4\sqrt{3} < 4\sqrt{15} = AF, A_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = 16 \text{ cm}^2 \text{ (1)} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$BC = 8 \text{ cm}, AO \perp BC, AO = 4 \text{ cm} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Cu teorema celor trei perpendiculare rezultă } FO \perp BC, EO \perp BC \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Din triunghiurile dreptunghice } EAO \text{ și } FAO \text{ avem } EO = 8 \text{ cm}, FO = 16 \text{ cm} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

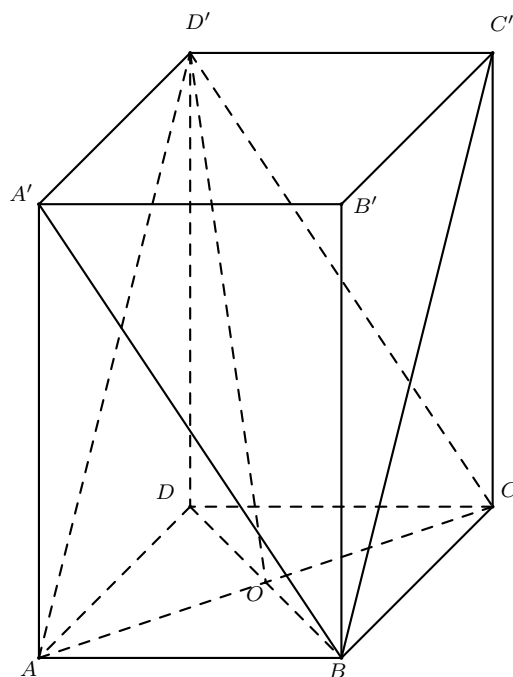
$$A_{FBC} = \frac{FO \cdot BC}{2} = 64 \text{ cm}^2, A_{EBC} = \frac{EO \cdot BC}{2} = 32 \text{ cm}^2 \text{ (2)} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă că } \sqrt{A_{ABC} \cdot A_{FBC}} = \sqrt{16 \cdot 64} = 4 \cdot 8 = A_{EBC} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Problema 3.

Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia bazei $AB = 2 \text{ cm}$ și muchia laterală $AA' = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Determinați:

- tangenta unghiului dintre dreptele AC și $A'B$;
- sinusul unghiului dintre dreptele BC' și CD' .



Soluție

$$\text{Realizarea desenului} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Din triunghiurile dreptunghice } D'C'C \text{ și } ABC \text{ avem } AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}, D'C = D'A = 4 \text{ cm} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{a) } A'B \parallel D'C \Rightarrow \sphericalangle(AC, A'B) = \sphericalangle(AC, D'C) = \sphericalangle ACD' \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Fie $\{O\} = AC \cap BD, D'O \perp AC$ (sau cu teorema celor trei perpendiculare sau ca mediană și înălțime în triunghiul isoscel $AD'C$).

În triunghiul dreptunghic $D'OC$ avem $D'O = \sqrt{14} \text{ cm}$ deci $\text{tg} \angle(AC, D'C) = \frac{D'O}{OC} = \sqrt{7} \dots\dots 1\text{p}$

b) $BC' \parallel AD' \Rightarrow \angle(BC', CD') = \angle(AD', CD') = \angle CD'A \dots\dots\dots 1\text{p}$

$A_{AD'C} = \frac{AC \cdot D'O}{2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}^2, A_{AD'C} = \frac{AD' \cdot D'C \cdot \sin \angle CD'A}{2} = 8 \sin \angle CD'A \dots\dots\dots 1\text{p}$

Din egalitatea celor două arii avem $\sin \angle CD'A = \frac{\sqrt{7}}{4} \dots\dots\dots 1\text{p}$

Observație: Dacă problema este rezolvată, dar desenul nu este perfect sau lipsește, se acordă punctajul maxim.

Problema 4. Fie numărul $p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025 \cdot 2024}}$.

a) Demonstrați că p este număr rațional.

b) Dacă $p = \frac{a}{b}$ este fracție ireductibilă, determinați cel mai mic număr natural n pentru care

$$\sqrt{a+b+n} \in \mathbb{N}.$$

Soluție

Folosind egalitatea $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ obținem $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \dots\dots\dots 4\text{p}$

a) $p = \frac{44}{45} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1\text{p}$

b) $a = 44, b = 45 \Rightarrow \sqrt{a+b+n} = \sqrt{89+n} \dots\dots\dots 1\text{p}$

$81 = 9^2 < 89 < 10^2$, deci $\sqrt{89+n} \in \mathbb{N}, n \text{ minim} \iff 89+n = 100 \iff n = 11 \dots\dots\dots 1\text{p}$

Observație: Conform baremului de punctaj de la 0 la 7 puncte, fiecare evaluator poate acorda doar punctaje întregi. Diferența dintre punctajele celor doi evaluatori, pentru o problemă, nu poate fi mai mare de 1 punct. Punctajul final pe problemă se calculează astfel: media punctajelor celor doi evaluatori se înmulțește cu 3, apoi se adaugă 1,5.