

A 76-a olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 14 februarie 2026

Clasa a VII-a – Soluții și bareme

Problema 1. Fie $N = \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{1012}\right) \right]^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2026}\right)}$.

Arătați că N este un număr natural.

Soluție

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{1012}\right) \right]^{-1} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1013}{1012} \right)^{-1} = \dots \quad 1p$$

$$= \left(\frac{1013}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{1013} \cdot \dots \quad 2p$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2026}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2025}{2026} = \frac{1}{2026} \cdot \dots \quad 2p$$

$$\Rightarrow N = \frac{\frac{2}{1013}}{\frac{1}{2026}} = \frac{2}{1013} : \frac{1}{2026} = \frac{2}{1013} \cdot \frac{2 \cdot 1013}{1} = 4. \dots \quad 1p$$

$$\Rightarrow N \in \mathbb{N}. \dots \quad 1p$$

Problema 2. Două terenuri au suprafețele egale, fiecare, cu câte 48 m². Un teren are formă dreptunghiulară, cu lungimea egală cu triplul lățimii, iar celălalt are formă de pătrat.

- Calculați lungimea laturii terenului în formă de pătrat.
- Calculați dimensiunile terenului dreptunghiular.
- Se împrejmuesc cele două terenuri cu garduri de sârmă. Arătați că pentru a împrejmui terenul dreptunghiular sunt necesari mai mulți metri de sârmă decât pentru împrejmuirea terenului în formă de pătrat.

Gazeta Matematică – Supliment 10 S:25.289

Soluție

- Dacă latura pătratului este x m, atunci aria sa este x^2 m². Astfel, $x^2 = 48$. $\dots \quad 1p$
Deoarece $x > 0$, rezultă $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Prin urmare, latura pătratului este $4\sqrt{3}$ m. $\dots \quad 2p$
- Dacă laturile dreptunghiului sunt y m și $3y$ m, atunci aria sa este $y \cdot 3y = 3y^2$ m². Rezultă ecuația $3y^2 = 48$, $\dots \quad 1p$
de unde $y^2 = 16$, $y > 0 \Rightarrow y = 4$. Astfel, laturile dreptunghiului sunt 4 m și 12 m. $\dots \quad 1p$

- c) Perimetrul pătratului este: $P_1 = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ m. Perimetrul dreptunghiului este: $P_2 = 2(4+12) = 32$ m. **1p**
 Atunci $P_1 < P_2$, deoarece $16\sqrt{3} = \sqrt{768} < \sqrt{1024} = 32$. Prin urmare, dreptunghiul are perimetrul mai mare. **1p**

Problema 3.

- a) Determinați numărul natural \overline{ab} scris în sistemul zecimal, care verifică relația $3\sqrt{\overline{ab}} = 2(a+b)$.
 b) Determinați numerele întregi a și b , care verifică relația

$$\sqrt{5^2 + 12^2} \cdot |a+2| + \sqrt{b} = 2\sqrt{7} + 39.$$

Soluție

- a) **Soluție 1.**

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{N} &\implies 2(a+b) \in \mathbb{N} \implies 3\sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \implies \sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \implies \overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}; \quad \mathbf{1p} \\ 2(a+b) : 2 &\implies 3\sqrt{\overline{ab}} : 2 \xrightarrow{(2,3)=1} \sqrt{\overline{ab}} : 2 \implies \overline{ab} \in \{16, 36, 64\}; \quad \mathbf{1p} \\ 3\sqrt{\overline{ab}} : 3 &\implies 2(a+b) : 3 \xrightarrow{(2,3)=1} a+b : 3 \implies \overline{ab} \in \{36\}; \quad \mathbf{1p} \\ 3\sqrt{36} &= 2(3+6) \iff 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9 \iff 18 = 18 \text{ adevărat} \implies \overline{ab} = 36. \quad \mathbf{1p} \end{aligned}$$

Soluție 2.

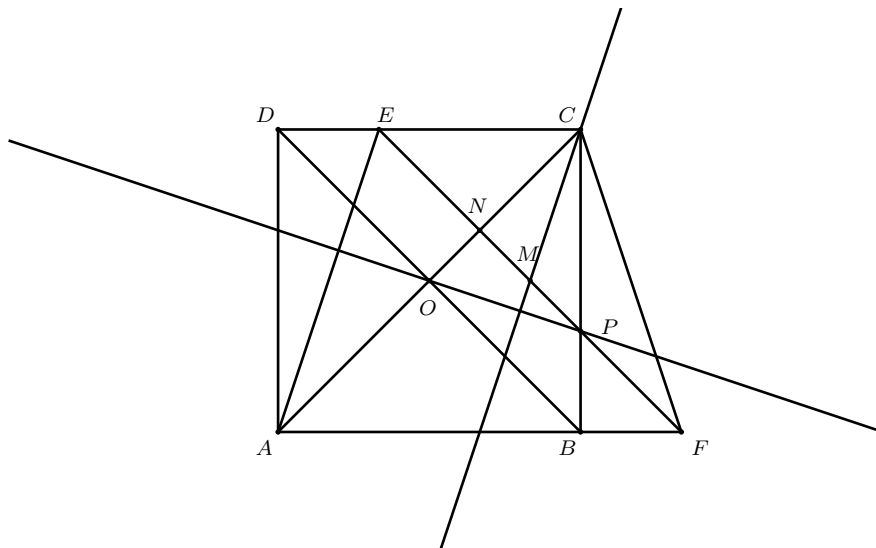
$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{N} &\implies 2(a+b) \in \mathbb{N} \implies 3\sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \implies \sqrt{\overline{ab}} \in \mathbb{N} \implies \overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}. \quad \mathbf{1p} \\ 3\sqrt{16} &= 2(1+6) \iff 3 \cdot 4 = 2 \cdot 7 \iff 12 = 14 \text{ fals}; 3\sqrt{25} = 2(2+5) \iff 3 \cdot 5 = 2 \cdot 7 \iff 15 = 14 \text{ fals}; \\ 3\sqrt{36} &= 2(3+6) \iff 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9 \iff 18 = 18 \text{ adevărat}; 3\sqrt{49} = 2(4+9) \iff 3 \cdot 7 = 2 \cdot 13 \iff 21 = 26 \text{ fals}; \\ 3\sqrt{64} &= 2(6+4) \iff 3 \cdot 8 = 2 \cdot 10 \iff 24 = 20 \text{ fals}; \\ 3\sqrt{81} &= 2(8+1) \iff 3 \cdot 9 = 2 \cdot 9 \iff 27 = 18 \text{ fals}. \quad \mathbf{2p} \\ &\implies \overline{ab} = 36 \quad \mathbf{1p} \end{aligned}$$

- b) $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$ **1p**
 $13 \cdot |a+2| + \sqrt{b} = \sqrt{28} + 39 \iff 13 \cdot (|a+2| - 3) = \sqrt{28} - \sqrt{b}$, unde $13 \cdot (|a+2| - 3) \in \mathbb{Z} \implies \sqrt{28} - \sqrt{b} \in \mathbb{Z}$, dar $\sqrt{28} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \sqrt{28} - \sqrt{b} = 0 \iff b = 28 \in \mathbb{Z}$ **1p**
 $\implies 13 \cdot (|a+2| - 3) = 0 \iff |a+2| - 3 = 0 \iff |a+2| = 3 \iff a+2 = 3 \text{ sau } a+2 = -3$
 $\iff a = 1 \in \mathbb{Z} \text{ sau } a = -5 \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{1p}$

Problema 4. În pătratul $ABCD$, punctul E este un punct al laturii CD astfel încât $EC = 2 \cdot ED$, iar O este punctul de intersecție al diagonalelor. Fie $EF \perp AC$, unde $F \in AB$, $EF \cap AC = \{N\}$, $EF \cap BC = \{P\}$, iar M este mijlocul segmentului EF . Demonstrați că:

- a) $BFED$ este paralelogram și $A_{BFED} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD}$;
 b) $AECF$ este trapez isoscel și $A_{AECF} = A_{ABCD}$;
 c) dreptele OP și MC sunt perpendiculare.

Soluție



- a) Deoarece $EF \perp AC$ și $BD \perp AC$, rezultă $EF \parallel BD$. Astfel $BF \parallel DE$ și $EF \parallel BD$, deci $BFED$ este un paralelogram. **1p**

$$A_{BFED} = BF \cdot AD, \text{ iar } BF = \frac{AB}{3} \implies A_{BFED} = \frac{AB \cdot AD}{3} = \frac{1}{3} A_{ABCD}.$$

..... **2p**

- b) $BF = DE$ și $BC = AD \implies \triangle BCF \equiv \triangle DAE$ (cazul c-c) $\implies CF = EA$. Deoarece $\triangle ADE \equiv \triangle CBF$, rezultă că

$$\widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{BFC}.$$

Cum $\widehat{AED} \neq 90^\circ$, obținem $\widehat{AEC} \neq \widehat{BFC}$, deci $AECF$ nu poate fi un paralelogram, dar $AF \parallel EC$, rezultă că $AECF$ este un trapez isoscel. **1p**

$$\triangle BCF \equiv \triangle DAE \implies A_{AECF} = A_{ABCE} + A_{BCF} = A_{ABCE} + A_{DAE} = A_{ABCD}.$$

..... **1p**

- c) Din enunț rezultă că $NP \perp OC$, deci NP este înălțimea triunghiului OPC corespunzătoare laturii OC . Deoarece $DB = 2OB$, $EF = 2MF$ și, în paralelogramul $DBEF$, avem $DB = EF$, rezultă $OB = MF$. Cum $OB \parallel MF$, rezultă că $OBFM$ este un paralelogram, deci $OM \parallel BF$ iar $AB \perp BC$, de unde $OM \perp BC$, adică OM este înălțimea triunghiului OPC corespunzătoare laturii CP . . **1p**

Din cele de mai sus rezultă că $NP \cap OM = \{M\}$ este ortocentrul triunghiului OPC , deci $MC \perp OP$.

..... **1p**

Observație: Conform baremului de punctaj de la 0 la 7 puncte, fiecare evaluator poate acorda doar punctaje întregi. Diferența dintre punctajele celor doi evaluatori, pentru o problemă, nu poate fi mai mare de 1 punct. Punctajul final pe problemă se calculează astfel: media punctajelor celor doi evaluatori se înmulțește cu 3, apoi se adaugă 1,5.