

A 76-a olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 14 februarie 2026

Clasa a VI-a –Soluții și bareme

Problema 1. Într-o sală, scaunele sunt așezate în rânduri. Dacă scaunele sunt puse în rânduri de câte 5, rămân 3 scaune pe dinafară. Dacă scaunele sunt puse în rânduri de câte 6, rămân 4 scaune pe dinafară, iar dacă scaunele sunt puse în rânduri de câte 7, rămân 5 scaune pe dinafară. Se știe că numărul scaunelor nu depășește 210. Care este numărul maxim de scaune care pot fi în sală?

Soluție 1. Conform teoremei împărțirii cu rest, pentru orice număr natural a există numerele naturale b, c, r , cu $r < b$, astfel încât: $a = b \cdot c + r$ 1p
Notăm cu a numărul de scaune. Din enunț rezultă:

$$a = 5 \cdot c_1 + 3 = 5c_1 + 5 - 2,$$

$$a = 6 \cdot c_2 + 4 = 6c_2 + 6 - 2,$$

$$a = 7 \cdot c_3 + 5 = 7c_3 + 7 - 2.$$

..... 1p
Adunând 2 la fiecare relație, obținem:

$$a + 2 = 5(c_1 + 1),$$

$$a + 2 = 6(c_2 + 1),$$

$$a + 2 = 7(c_3 + 1).$$

Rezultă că numărul $a + 2$ este divizibil cu 5, 6 și 7, deci este un multiplu comun al acestor numere:

$$a + 2 = [5, 6, 7] \cdot k, \quad k \geq 1.$$

..... 2p
Deoarece: $c.m.m.d.c.(5, 6, 7) = 1$, avem: $c.m.m.m.c.[5, 6, 7] = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ 1p

Dacă $k = 1 \Rightarrow a + 2 = 210 \Rightarrow a = 210 - 2 = 208 < 210$ convine, Dacă $k = 2 \Rightarrow a + 2 = 420 \Rightarrow a = 420 - 2 = 418 > 210$ nu convine, Pentru $k \geq 2$ nu convine. 1p
Numărul maxim de scaune care pot fi în sală este 208. 1p

Problema 2. Într-o excursie școlară, elevii au putut alege între trei tipuri de activități: drumeție, ciclism și vizitarea orașului. Programele s-au desfășurat la ore diferite, astfel încât un elev a putut participa la mai multe activități. Dintre elevi 18 au participat la drumeție, 10 au mers cu bicicleta, 12 au vizitat orașul, 6 au participat și la drumeție și la ciclism, 7 au participat și la drumeție și la vizitarea orașului, 5 au participat și la ciclism și la vizitarea orașului, 4 elevi au participat la toate cele trei activități.

Câți elevi au participat în total la excursie, dacă fiecare elev a ales cel puțin o activitate? Justificați răspunsul.

Karda István, Suseni

Soluție

Numărul elevilor care au participat la două activități include și pe cei care au participat la toate trei, astfel că trebuie să scădem acești 4 elevi.

Drumeție și ciclism (fără vizitare oraș): $6 - 4 = 2$

Drumeție și vizitare oraș (fără ciclism): $7 - 4 = 3$

Ciclism și vizitare oraș (fără drumeție): $5 - 4 = 1$ **2p**

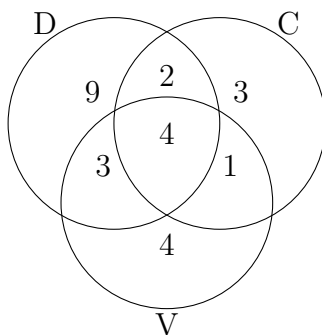
Deoarece sunt cunoscute intersecțiile, putem determina ușor câți elevi au participat doar la o singură activitate:

Ciclism: $10 - (2 + 1 + 4) = 3$

Vizitare oraș: $12 - (4 + 3 + 1) = 4$

Drumeție: $18 - (4 + 2 + 3) = 9$ **3p**

Numărul total de elevi care au participat la excursie se obține prin adunarea numerelor din toate regiunile diagramei Venn-Euler: $9 + 3 + 4 + 2 + 3 + 1 + 4 = 26$ **2p**



Observație: Dacă diagrama Venn-Euler este completată corect și dă răspunsul corespunzător cerinței, se acordă punctajul maxim.

Problema 3. Aflați numărul natural $n, n \geq 2$, pentru care fracția $\frac{2022}{n^3 - n}$ este număr natural.

Gazeta Matematică - Supliment 10 S:25.279

Soluție. Frația $\frac{2022}{n^3 - n}$ este număr natural numai dacă $n^3 - n$ este divizorul lui 2022. **1p**

Numărul 2022 se poate descompune în produs de factori ca $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, deci divizorii lui 2022 sunt 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022. **1p**

Iar $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1)$ **1p**

Așadar, numitorul este divizor al lui 2022 doar dacă ambii factori ai produsului $n \cdot (n^2 - 1)$ sunt între divizorii ai lui 2022. **1p**

Analizăm următoarele cazuri:

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies n^2 - 1 = 3, & 3 \mid 2022 \\ n = 3 &\implies n^2 - 1 = 8, & 8 \nmid 2022 \\ n = 6 &\implies n^2 - 1 = 35, & 35 \nmid 2022 \\ n = 337 &\implies n^2 - 1 > 2022 \\ n = 674 &\implies n^2 - 1 > 2022 \\ n = 1011 &\implies n^2 - 1 > 2022 \\ n = 2022 &\implies n^2 - 1 > 2022. \end{aligned}$$

..... **2p**

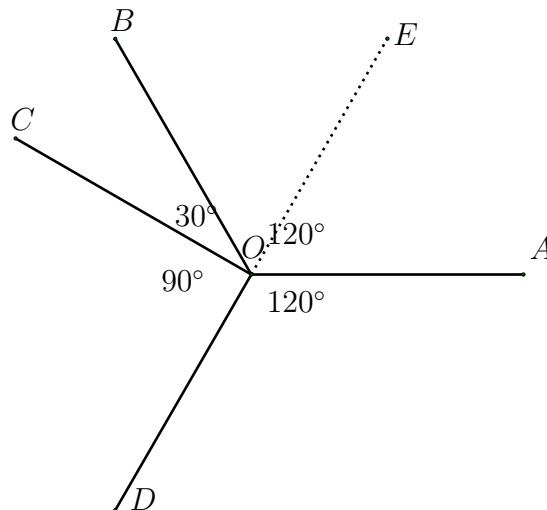
După verificări reiese că singura soluție este $n = 2$, deci $\frac{2022}{n^3 - n} = \frac{2022}{8 - 2} = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N}$ **1p**

Problema 4. În jurul punctului O se consideră unghiurile \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} și \widehat{DOA} , astfel încât: $\widehat{AOB} = 120^\circ$, măsura unghiului \widehat{COD} este cu 30° mai mare decât măsura suplementului unghiului \widehat{AOB} , iar $5 \cdot \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$.

- Determinați măsurile unghiurilor \widehat{COD} , \widehat{BOC} și \widehat{DOA} .
- Demonstrați că punctele E , O și D sunt coliniare, unde OE este bisectoarea unghiului \widehat{AOB} .

Karda István, Suseni

Soluție



- Măsura suplementului unghiului \widehat{AOB} este $180^\circ - \widehat{AOB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, deci $\widehat{COD} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ **1p**

Pe de altă parte

$$5 \cdot \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$$

$$5 \cdot \widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$$

$$4 \cdot \widehat{BOC} = \widehat{AOB}$$

$$4 \cdot \widehat{BOC} = 120^\circ$$

$$\widehat{BOC} = 30^\circ .$$

..... 2p

Așadar deoarece unghiurile \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} și \widehat{DOA} , unghiuri în jurul punctului O , deci

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA} = 360^\circ$$

$$120^\circ + 30^\circ + 90^\circ + \widehat{DOA} = 360^\circ$$

$$240^\circ + \widehat{DOA} = 360^\circ$$

$$\widehat{DOA} = 120^\circ .$$

..... 1p

b) Dacă OE este bisectoarea unghiului \widehat{AOB} și $\widehat{AOB} = 120^\circ$, atunci $\widehat{EOB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ 1p

Calculăm măsura unghiului \widehat{EOD} :

$$\widehat{EOD} = \widehat{EOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}$$

$$\widehat{EOD} = 60^\circ + 30^\circ + 90^\circ$$

$$\widehat{EOD} = 180^\circ .$$

..... 1p

Măsura unghiului $\widehat{EOD} = 180^\circ$, rezultă că punctele E , O și D sunt coliniare. 1p

Observație: Conform baremului de punctaj de la 0 la 7 puncte, fiecare evaluator poate acorda doar punctaje întregi. Diferența dintre punctajele celor doi evaluatori, pentru o problemă, nu poate fi mai mare de 1 punct. Punctajul final pe problemă se calculează astfel: media punctajelor celor doi evaluatori se înmulțește cu 3, apoi se adaugă 1,5.