

A 76-a olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 14 februarie 2026

Clasa a V-a – Soluții și bareme

Problema 1.

Calculați!

$$2^0 \cdot 3^2 + 5^{16} : 5^{14} + 488 : \left[2^4 \cdot 3 - (6^{15})^2 : 2^{30} : (3^6)^5 + 4725 : 63 \right]$$

Constantinescu Ágnes, Cristuru Secuiesc

Soluție

$$(6^{15})^2 : 2^{30} : (3^6)^5 = 6^{30} : 2^{30} : 3^{30} \dots\dots\dots 1p$$

$$6^{30} : 2^{30} : 3^{30} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$4725 : 63 = 75 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^0 \cdot 3^2 + 5^{16} : 5^{14} = 1 \cdot 9 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \dots\dots\dots 2p$$

$$\left[2^4 \cdot 3 - (6^{15})^2 : 2^{30} : (3^6)^5 + 4725 : 63 \right] = 16 \cdot 3 - 1 + 75 = 48 - 1 + 75 = 122 \dots\dots\dots 1p$$

$$34 + 488 : 122 = 34 + 4 = 38 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2.

Am cumpărat în total 20 de pești de acvariu din două specii. Un neon costă 24 lei, iar un caras auriu costă 12 lei. Am plătit în total 324 lei. Câți pești am cumpărat din fiecare specie?

Lengyel-Fischer Ágnes, Miercurea Ciuc

I. Soluție. Metoda falsei ipoteze

$$\text{Presupunem că toți peștii sunt pești neon } 24 \cdot 20 = 480 \text{ lei} \dots\dots\dots 1p$$

$$480 - 324 = 156 \text{ lei (diferență)} \dots\dots\dots 2p$$

$$24 - 12 = 12 \text{ lei (diferență)} \dots\dots\dots 1p$$

$$156 : 12 = 13 \text{ bucăți caras auriu} \dots\dots\dots 2p$$

$$20 - 13 = 7 \text{ bucăți neon} \dots\dots\dots 1p$$

sau

$$\text{Presupunem că toți peștii sunt pești caras auriu } 12 \cdot 20 = 240 \text{ lei} \dots\dots\dots 1p$$

$$324 - 240 = 84 \text{ lei (diferență)} \dots\dots\dots 2p$$

$$24 - 12 = 12 \text{ lei (diferență)} \dots\dots\dots 1p$$

$$84 : 12 = 7 \text{ bucăți neon} \dots\dots\dots 2p$$

$$20 - 7 = 13 \text{ bucăți caras auriu} \dots\dots\dots 1p$$

II. Soluție Cu ecuație

$$\begin{cases} n - \text{neon } a - \text{caras auriu} \\ n + a = 20 \\ 24n + 12a = 324 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{cases} n + a = 20 \\ 2n + a = 27 \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$n = 27 - 20 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$n = 7 \text{ neon} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$a = 20 - 7 = 13 \text{ caras auriu} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

III. Soluție Metoda încercării

24 de lei - neon	12 de lei - caras auriu	Total
1	19	252
2	18	264
3	17	276
4	16	288
5	15	300
6	14	312
7	13	324
8	12	336
9	11	348
10	10	360
11	9	372
12	8	384
13	7	396
14	6	408
15	5	420
16	4	432
17	3	444
18	2	456
19	1	468

Se dau maximum de puncte, numai dacă tabelul e complet, altfel pentru răspunsul corect fără finalizarea încercărilor sau justificarea că nu pot fi alte soluții, primește **3 puncte**.

Problema 3. Scriem în ordine crescătoare toate numerele naturale de trei cifre care au toate cifrele impare.

- Al câtelea termen este 799?
- Care este numărul din mijloc?

Soluție

a) Cifrele impare sunt: 1, 3, 5, 7, 9, deci avem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ astfel de numere **2p**

I. cu cifra 8 nu poate să înceapă un astfel de număr, deci vom avea $5 \cdot 5 = 25$ numere care încep cu cifra 9

$125 - 25 = 100$, deci 799 este al 100-lea număr **2p**

sau

II. cu fiecare cifră impară încep $125:5=25$ de numere, 799 este ultimul număr care începe cu 7,

deci $4 \cdot 25 = 100$, 799 este al 100-lea termen **2p**

b) $125:2=62$, rest 1, deci căutăm al 63-lea număr **1p**

Cu cifra 1 și 3 vor începe câte 25-25 de numere, adică 50 de bucăți. Rămân 13 bucăți de numere de trei cifre. Numărul căutat începe cu cifra 5 **1p**

Numărul căutat este 555 (ori calculează aceste 13 numere ori scrie printr-un algoritm) **1p**

Problema 4. Determinați toate numerele naturale care, împărțite la 9, au câtul egal cu dublul restului!

Constantinescu Ágnes, Cristuru Secuiesc

Soluție

Deîmpărțitul=împărțitorul·câtul+rest, restul<împărțitorul

$a = b \cdot c + r, r < b$ **1p**

$c = 2 \cdot r$ **1p**

$b = 9$, deci $a = 9 \cdot 2r + r = 19r, r < 9$ **2p**

$r = 0$, deci $a = 19 \cdot 0 = 0$ **1p**

$a \in \{0, 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152\}$ **2p**

Observație: Conform baremului de punctaj de la 0 la 7 puncte, fiecare evaluator poate acorda doar punctaje întregi. Diferența dintre punctajele celor doi evaluatori, pentru o problemă, nu poate fi mai mare de 1 punct. Punctajul final pe problemă se calculează astfel: media punctajelor celor doi evaluatori se înmulțește cu 3, apoi se adaugă 1,5.