

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) $a = \frac{4-1}{1 \cdot 4} + \frac{7-4}{3 \cdot 7} + \frac{10-7}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{103-100}{100 \cdot 103}$	1p
	$a = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} = \frac{1}{1} - \frac{1}{103} = \frac{102}{103}$	2p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{5}{102 \cdot 107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7-2}{2 \cdot 7} + \frac{12-7}{7 \cdot 12} + \frac{17-12}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{107-102}{102 \cdot 107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{102} - \frac{1}{107} \right)$	1p
	$b = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{107} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{107}{214} - \frac{2}{214} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{105}{214} = \frac{21}{214}$	2p
	$\frac{103 \cdot a + 214 \cdot b}{103 \cdot a - 214 \cdot b} = \frac{102 + 21}{102 - 21} = \frac{123}{81} = \frac{41}{27}$	2p
	valoarea raportului este egală cu 1, (518)	1p
	b) $2026 \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} \right) = 2025$	2p
	$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} = \frac{2025}{2026}$	1p
	$S = \frac{a+2-1}{a+2} + \frac{b+3-1}{b+3} + \frac{c+4-1}{c+4} + \frac{d+5-1}{d+5} + \frac{e+6-1}{e+6} + \frac{f+7-1}{f+7}$	2p
	$S = 1 - \frac{1}{a+2} + 1 - \frac{1}{b+3} + 1 - \frac{1}{c+4} + 1 - \frac{1}{d+5} + 1 - \frac{1}{e+6} + 1 - \frac{1}{f+7}$	1p
	$S + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+4} + \frac{1}{d+5} + \frac{1}{e+6} + \frac{1}{f+7} = 6$	2p
	$S + \frac{2025}{2026} = 6 \rightarrow S = 6 - \frac{2025}{2026} = 5 + 1 - \frac{2025}{2026} = 5 + \frac{1}{2026} = \frac{10131}{2026}$	2p

2.	$n : 25 = x \text{ rest } r_1 \rightarrow n = 25 \cdot x + r_1, r_1 < 25$ $n : 45 = y \text{ rest } r_2 \rightarrow n = 45 \cdot y + r_2, r_2 < 45$ $n : 81 = z \text{ rest } r_3 \rightarrow n = 81 \cdot z + r_3, r_3 < 81$ $r_1 < 25 \rightarrow r_1 \leq 24; r_2 < 45 \rightarrow r_2 \leq 44; r_3 < 81 \rightarrow r_3 \leq 80$ <p>Adunând cele 3 inegalități obținem $r_1 + r_2 + r_3 \leq 148$, dar</p> $r_1 + r_2 + r_3 = 148 \rightarrow r_1 = 24, r_2 = 44, r_3 = 80. \rightarrow$ $\left. \begin{aligned} n &= 25 \cdot x + 24 \rightarrow n + 1 = 25 \cdot (x + 1) \\ n &= 45 \cdot y + 44 \rightarrow n + 1 = 45 \cdot (y + 1) \\ n &= 81 \cdot z + 80 \rightarrow n + 1 = 81 \cdot (z + 1) \end{aligned} \right\} \rightarrow n + 1 = [25; 45; 81] \cdot k, k \in N$ $[25; 45; 81] = 5^2 \cdot 3^4 = 2025 \rightarrow n + 1 = 2025 \cdot k, k \in N$ $n + 2026 = n + 1 + 2025 = 2025 \cdot k + 2025 = 2025 \cdot (k + 1) : 2025$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>4p</p> <p>3p</p> <p>4p</p>
3	<p>a) Notăm $d = (a; b)$ și $m = [a; b] \rightarrow d \cdot 0,2 = m \cdot 0,0(1) \rightarrow \frac{d}{5} = \frac{m}{90} \rightarrow m = 18 \cdot d$</p> $d = (a; b) \rightarrow a = d \cdot x, b = d \cdot y, (x; y) = 1$ $a \cdot b = (a; b) \cdot [a; b] \rightarrow d \cdot x \cdot d \cdot y = d \cdot m \rightarrow x \cdot d \cdot y = 18 \cdot d \rightarrow x \cdot y = 18$ <p>Cum $a < b \rightarrow d \cdot x < d \cdot y \rightarrow x < y$</p> <p>Din $x \cdot y = 18, (x; y) = 1, x < y$ rezultă următoarele cazuri :</p> <p>Cazul I : $x = 1, y = 18 \rightarrow a = d, b = 18 \cdot d$, dar $5 < a < b < 90 \rightarrow$ $5 < d < 18 \cdot d < 90 \rightarrow 5 < d, d < 5$ nu convine</p> <p>Cazul II : $x = 2, y = 9 \rightarrow a = 2 \cdot d, b = 9 \cdot d$, dar $5 < a < b < 90 \rightarrow$ $5 < 2 \cdot d < 9 \cdot d < 90 \rightarrow 3 \leq d \leq 9 \rightarrow d \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$</p> <p>Soluțiile sunt</p> $\left\{ \begin{aligned} a &= 6 \\ b &= 27 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 8 \\ b &= 36 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 10 \\ b &= 45 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 54 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 14 \\ b &= 63 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 16 \\ b &= 72 \end{aligned} \right\}; \left\{ \begin{aligned} a &= 18 \\ b &= 81 \end{aligned} \right\}.$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
	<p>b) $\overline{abc} = (98a + 7b) + (2a + 3b + c)$ și $\overline{cba} = (98c + 7b) + (2c + 3b + a)$</p> $7/\overline{abc} \rightarrow 7/(2a + 3b + c), 7/\overline{cba} \rightarrow 7/(2c + 3b + a)$ $\rightarrow 7/(3a + 6b + 3c)$ <p>Dar $7/(7a + 7b + 7c) \rightarrow 7/(4a + b + 4c)$</p>	<p>4p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

4	<p>a) $\angle AOC = 90^\circ$; $\angle BOD = 90^\circ$</p> <p>Notăm: $\angle AOB = 2a$ și $\angle COD = 2b$</p> <p>$\angle AOB + \angle COD + \angle AOC + \angle BOD = 360^\circ \rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ $\rightarrow a + b = 90^\circ$</p> <p>$OM$ – bisectoarea unghiului $\angle AOB$: $\angle AOM = \angle MOB = \frac{\angle AOB}{2} = a$</p> <p>$ON$ – bisectoarea unghiului $\angle COD$: $\angle CON = \angle NOD = \frac{\angle COD}{2} = b$</p> <p>$\angle MON = \angle MOA + \angle AOC + \angle CON = a + 90^\circ + b = 180^\circ \rightarrow$ $\angle MON$ – alungit \rightarrow punctele M, O, N sunt coliniare</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
	<p>b) OP – bisectoarea unghiului $\angle BOC$: $\angle BOP = \angle POC = \frac{\angle BOC}{2} = x$</p> <p>$\angle NOP = \angle NOC + \angle COP = b + x$</p> <p>$\angle BOP = \angle POA + \angle AOB = \angle POA + 2a = x$</p> <p>$\angle POA = \angle COA - \angle COP = 90^\circ - x \rightarrow x = 90^\circ - x + 2a \rightarrow 2x = 90^\circ + 2a$ $\rightarrow x = 45^\circ + a$</p> <p>$\rightarrow \angle NOP = b + x = b + 45^\circ + a = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>