



## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapa Locală

#### Clasa a IX-a

7 februarie 2026

#### Subiectul 1 (21 puncte)

Să se rezolve ecuația  $\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]^2 = [2x] + 2$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .

#### Subiectul 2 (21 puncte)

Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive astfel încât  $a + b + c = 2026$ . Să se arate că

$\sqrt{2026a + bc} + \sqrt{2026b + ac} + \sqrt{2026c + ab} \leq 4052$ . Pentru ce valori ale numerelor  $a, b, c$  are loc egalitatea?

#### Subiectul 3 (21 puncte)

- a) Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , numărul  $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n + \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n$  este natural.
- b) Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , numărul  $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^{2n-1}$  este multiplu al lui 5.

#### Subiectul 4 (21 puncte)

Se consideră patrulaterul  $ABCD$  înscris într-un cerc de centru  $O$ . Se notează cu  $H_1, H_2, H_3, H_4$  ortocentrele triunghiurilor  $ABC, BCD, CDA$ , respectiv  $DAB$  și cu  $M, N$  mijloacele segmentelor  $AC$ , respectiv  $BD$ .

- a) Arătați că segmentele  $DH_1, AH_2, BH_3$  și  $CH_4$  au același mijloc.
- b) Dacă  $P$  și  $Q$  sunt mijloacele segmentelor  $DH_1$ , respectiv  $MN$ , arătați că punctele  $O, P$  și  $Q$  sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică, nr. 11/2025

#### Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă 16 puncte din oficiu.
- Timp de lucru: 3 ore.