

Olimpiada Națională de Matematică**Faza locală - Dâmbovița****7 februarie 2026****CLASA A VIII-A - Barem de corectare****Subiectul 1.**a) Determinați numerele întregi a și b care au proprietatea

$$(a+1, b-1) \subset (\sqrt{360}, \sqrt{2025}] \subset (a, b)$$

b) Dacă a, b, c sunt numere reale, să se arate că

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

c) Să se arate că toate numerele naturale de trei cifre \overline{abc} ale căror cifre verifică relația $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ se divid cu 37.**Soluție.** a) Din $(a+1, b-1) \subset (\sqrt{360}, \sqrt{2025}]$ obținem $\sqrt{360} \leq a+1 < b-1 \leq \sqrt{2025}$ și din $(\sqrt{360}, \sqrt{2025}] \subset (a, b)$ obținem $a \leq \sqrt{360} < \sqrt{2025} < b$.**4 puncte**Cum $18 < \sqrt{360} < 19$, obținem $a+1 \geq 19$ și $a \leq 18$, deci $a = 18$, și din $\sqrt{2025} = 45$ obținem $b-1 \leq 45$ și $b > 45$, de unde $b = 46$.**3.5 puncte**

b) Calcul direct.

7.5 punctec) Fie \overline{abc} un număr cu $a^3+b^3+c^3 = 3abc$. Din b) avem $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$ și cum $a+b+c \neq 0$, obținem $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$.**2 puncte**Dar atunci $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$, de unde $a = b = c$.**3.5 puncte**Atunci $\overline{abc} = a \cdot 111 = a \cdot 37 \cdot 3$ e divizibil cu 37.**2 puncte****Subiectul 2.**a) Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Arătați că n e pătrat perfect.b) Fie $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Arătați că m și n sunt pătrate perfecte.c) Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Arătați că m, n și p sunt pătrate perfecte.**Soluție.** a) Fie $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, cu $(a, b) = 1$.**3 puncte**

Atunci $a^2 = nb^2$ și dacă $b \neq 1$, atunci fie p un divizor prim al lui b . Rezultă că $p|a$, contradicție cu $(a, b) = 1$.

3 puncte

Deci $b = 1$ și $n = a^2$ e pătrat perfect.

1 punct

b) Fie $\sqrt{m} + \sqrt{n} = r \in \mathbb{Q}$. Dacă $r = 0$, evident $m = n = 0$ sunt pătrate perfecte.

1.5 puncte

Avem $\sqrt{n} = r - \sqrt{m}$ de unde, prin ridicare la pătrat, $n = r^2 - 2r\sqrt{m} + m \Leftrightarrow \sqrt{m} = \frac{r^2 + m - n}{2r} \in \mathbb{Q}$.

4 puncte

Din punctul a) rezultă că m e pătrat perfect. Analog n e pătrat perfect.

2 puncte

c) Fie $\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p} = r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ unde $a, b \in \mathbb{N}^*$; atunci $\sqrt{m} + \sqrt{n} = r - \sqrt{p}$ de unde, prin ridicare la pătrat, $m + n + 2\sqrt{mn} = r^2 + p - 2r\sqrt{p}$.

3 puncte

Din $r = \frac{a}{b}$ obținem $mb^2 + nb^2 + 2b^2\sqrt{mn} = a^2 + pb^2 - 2ab\sqrt{p}$ de unde $\sqrt{4b^4mn} + \sqrt{4a^2b^2p} = a^2 + pb^2 - mb^2 - nb^2 \in \mathbb{Q}$. Din b) obținem că $\sqrt{4a^2b^2p} \in \mathbb{N}$ și atunci $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ și din a) p e pătrat perfect.

4 puncte

Analog m și n sunt pătrate perfecte.

1 punct**Subiectul 3.**

Determinați toate perechile de numere naturale (m, n) cu proprietatea $m^3 = n^3 + n^2 + 7n + 1$.

Soluție. Fie m și n cu $m^3 = n^3 + n^2 + 7n + 1$; atunci $n^3 + n^2 + 7n + 1$ e cub și e mai mare strict decât n^3 .

8 puncte

Atunci $n^3 + n^2 + 7n + 1 \geq (n + 1)^3 \Leftrightarrow 2n \geq n^2$. Dacă $n = 0$, atunci obținem perechea $(m, n) = (1, 0)$. Dacă $n \neq 0$, din $2n \geq n^2$ obținem $2 \geq n$, deci $n \in \{1, 2\}$. Dacă $n = 1$, atunci $m^3 = 10$ nu e cub. Dacă $n = 2$ atunci $m^3 = 27$, de unde $m = 3$.

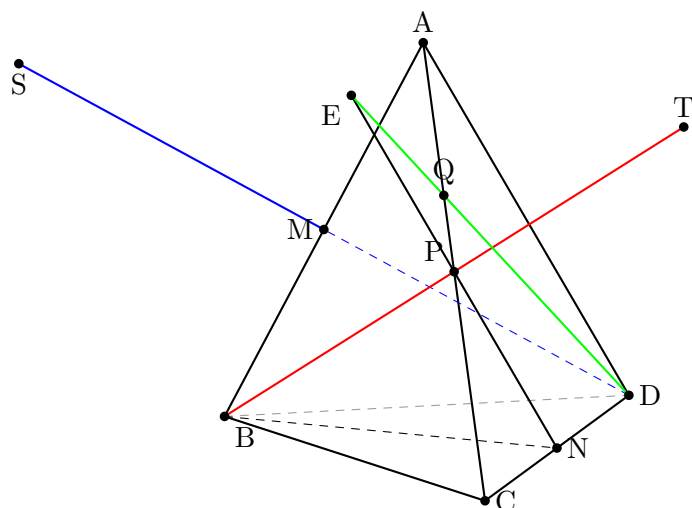
13.5 puncte

Deci perechile căutate sunt $(1, 0)$ și $(3, 2)$.

1 punct**Subiectul 4.**

Fie $ABCD$ un tetraedru. Notăm cu M și P mijloacele muchiilor AB și AC . Fie $Q \in AC$ astfel încât $CQ = 2AQ$. Construim punctele S și T simetricele punctelor D și B față de M respectiv P . Pe semidreapta (DQ) considerăm un punct E astfel încât $DQ = 2QE$ și Q e între D și E . Arătați că punctele T , E și S sunt coliniare.

Soluție.



Desen.

2.5 puncte

Fie N mijlocul lui CD . Din ipoteză avem $AE \parallel CD$ și $AE = \frac{1}{2}CD$. Deci $AECN$ e paralelogram, deci E, P, N sunt coliniare, cu N mijlocul lui EN . Atunci diagonalele patrulaterului $EBNT$ se intersectează în mijloc, deci e paralelogram, deci $ET \parallel BN$.

9 puncte

Avem că $AEND$ e paralelogram, deci EN paralel și egal cu AD . Dar și $SADB$ e paralelogram, deci AD paralel și egal cu SB . Deci EN paralel și egal cu SB , de unde $SENB$ paralelogram, prin urmare SE paralel (și egal) cu NB .

10 puncte

Cum $ES \parallel BN$ și $ET \parallel BN$ rezultă că E, S, T sunt coliniare.

1 punct

OBSERVAȚIE: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.