

## Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală - Dâmbovița

7 februarie 2026

## CLASA A VII-A - Barem de corectare

## Subiectul 1.

Calculați  $(A - B)^{2026}$  unde

$$A = \sqrt[2026]{2^{2025} + 2^{2024} + 2^{2023} + \dots + 2^1 + 2^0 + 1} \text{ și}$$

$$B = \sqrt[2026]{2 \cdot 3^{2025} + 2 \cdot 3^{2024} + 2 \cdot 3^{2023} + \dots + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 + 1}$$

**Soluție.** Pentru orice  $n$  natural avem  $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ .Avem suma  $S_1 = (((((1 + 2^0) + 2^1) + 2^2) + \dots + 2^{2024}) + 2^{2025})$ 

$$1 + 2^0 = 2^1$$

$$2^1 + 2^1 = 2^2$$

...

$$2^{2024} + 2^{2024} = 2^{2025}$$

$$2^{2025} + 2^{2025} = 2^{2026}$$

Deci  $A = \sqrt[2026]{2^{2026}} = 2 \dots \dots \dots 10P$  (cu calculele efectuate)Pentru orice număr natural  $n$  avem:  $2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$ Avem suma  $S_2 = ((((((1 + 2 \cdot 3^0) + 2 \cdot 3^1) + 2 \cdot 3^2) + \dots + 2 \cdot 3^{2024}) + 2 \cdot 3^{2025}))$ 

$$1 + 2 \cdot 3^0 = 3^1$$

$$3^1 + 2 \cdot 3^1 = 3^2$$

...

$$3^{2024} + 2 \cdot 3^{2024} = 3^{2025}$$

$$3^{2025} + 2 \cdot 3^{2025} = 3^{2026}$$

 $B = \sqrt[2026]{3^{2026}} = 3 \dots \dots \dots 10P$  (cu calculele efectuate)Deci  $(A - B)^{2026} = (2 - 3)^{2026} = (-1)^{2026} = 1 \dots \dots \dots 2.5P$ 

## Subiectul 2.

a) Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale nenule. Arătați că  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  este rațional dacă și numai dacă  $a$  și  $b$  sunt pătrate perfecte.b) Aflați numerele naturale  $n$  știind că  $\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{2026 - n}$  este rațional.

**Soluție.** a)  $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}$ . Deci avem că  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ .....5P

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$  prin adunare și scădere avem că:  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = m^2$  și  $\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = n^2$  unde  $m$  și  $n$  sunt numere naturale.....5P

b) Din punctul a) avem că  $n^2 + n + 1$  și  $2026 - n$  trebuie să fie pătrate perfecte.

$n^2 < n^2 + n + 2 \leq (n+1)^2$  pentru orice număr natural nenul.....5P

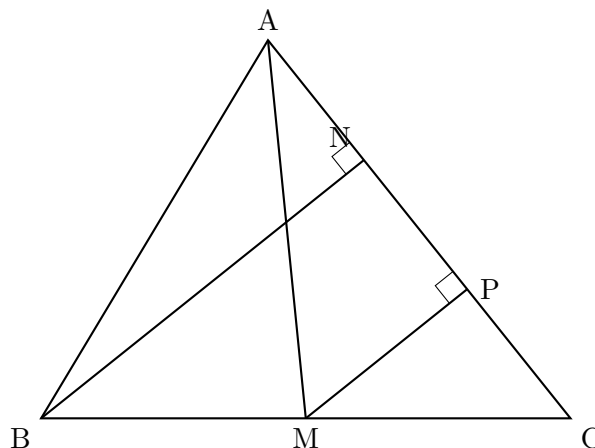
$n = 0$  nu verifică ecuația.....2P deci trebuie să avem egalitatea:  $n^2 + n + 2 = (n+1)^2$  de unde rezultă  $n = 1$ ..... 4P

Observăm că  $n = 1$  verifică.....1.5 P

### Subiectul 3.

În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$ , mediana  $AM$ ,  $M \in BC$ , este congruentă cu înălțimea  $BN$ ,  $N \in AC$ . Să se calculeze măsura unghiului  $\angle CAM$ .

**Soluție.** Construim figura:.....5P



Ducem  $MP \parallel BN$ , cu  $P \in AC$ . Deoarece  $BN \perp AC$ , avem deci  $MP \perp AC$ . .....7P

$MP$  este linie mijlocie în triunghiul  $BNC$  deci  $MP = \frac{BN}{2}$ .....3P

Triunghiul  $MPC$  este dreptunghic.  $MP = \frac{BN}{2} = \frac{AM}{2}$  și deci cateta  $MP$  este jumătate din ipotenuza  $AM$  de unde rezultă conform reciprocei teoremei unghiului de  $30^\circ$  că  $\angle CAM = 30^\circ$ .....7.5P

### Subiectul 4.

Determinați numerele prime  $p$ ,  $q$  și  $r$  care verifică relația

$$p + q^2 r^4 = 2025$$

**Soluție.**  $p = 2025 - q^2 r^4$  de unde avem  $(45 - qr^2)(45 + qr^2) = p$ .....5P

Deci  $45 - qr^2 | p$  și  $45 + qr^2 | p$  dar cum  $p$  este prim avem că:  $45 - qr^2 = 1$  și  $45 + qr^2 = p$ . .....5.5  
P

Deci  $qr^2 = 44$  .....3 P și  $q$  și  $r$  prime deci  $q = 11$ .....3P și  $r = 2$  .....3P de unde avem  
 $p = 89$ .....3P

**OBSERVAȚIE:** Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.