

# Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală - Dâmbovița

7 februarie 2026

## CLASA A VI-A - Barem de corectare

### Subiectul 1.

Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale nenule și  $S = \frac{(a,b)}{a} + \frac{[a,b]}{b}$ , unde  $[a,b]$  este cel mai mic multiplu comun al numerelor  $a$  și  $b$  iar  $(a,b)$  este cel mai mare divizor comun al numerelor  $a$  și  $b$ . Arătați că  $S \in \mathbb{N}$  dacă și numai dacă  $S = 2$ .

**Soluție.** " $\Rightarrow$ " Deoarece  $(a,b)|a \Rightarrow 0 < \frac{(a,b)}{a} \leq 1 \quad \dots 5P$

dar  $\frac{[a,b]}{b} \in \mathbb{N}^* \quad \dots 5P$

$\frac{(a,b)}{a} + \frac{[a,b]}{b} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{(a,b)}{a} = 1 \Rightarrow (a,b) = a \quad \dots 5P$

$\Rightarrow a|b$  deci  $[a,b] = b \Rightarrow \frac{[a,b]}{b} = 1$  deci  $S = 2 \quad \dots 5P$

" $\Leftarrow$ "  $S = 2 \Rightarrow S \in \mathbb{N} \quad \dots 2.5P$

### Subiectul 2.

Aflați numerele naturale  $A$  și  $B$  știind că sunt multipli consecutivi ai numărului 41 și  $A + B$  are exact 3 divizori.

**Soluție.**  $A = 41n, B = 41(n+1) \quad \dots 3P$

$A + B = (2n+1) \cdot 41 \dots 3P$

41 este prim.

$A + B$  are ca divizori 1 și 41. ....4P

Dacă  $A + B$  mai are alt divizor prim  $p$  diferit de 41 atunci  $A + B$  are minim 4 divizori 1,  $p$ , 41,  $41p$  ....4P

Deci unica variantă ca  $A + B$  să aibă 3 divizori este ca  $A + B = 41^2 \dots 2.5P$

Deci  $41^2 = (2n+1) \cdot 41 \Rightarrow 2n+1 = 41 \Rightarrow n = 20 \dots 2P$

$A = 820 \dots 2P$

$B = 841 \dots 2P$

### Subiectul 3.

Unghiurile  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOA$  sunt în jurul unui punct  $O$  și

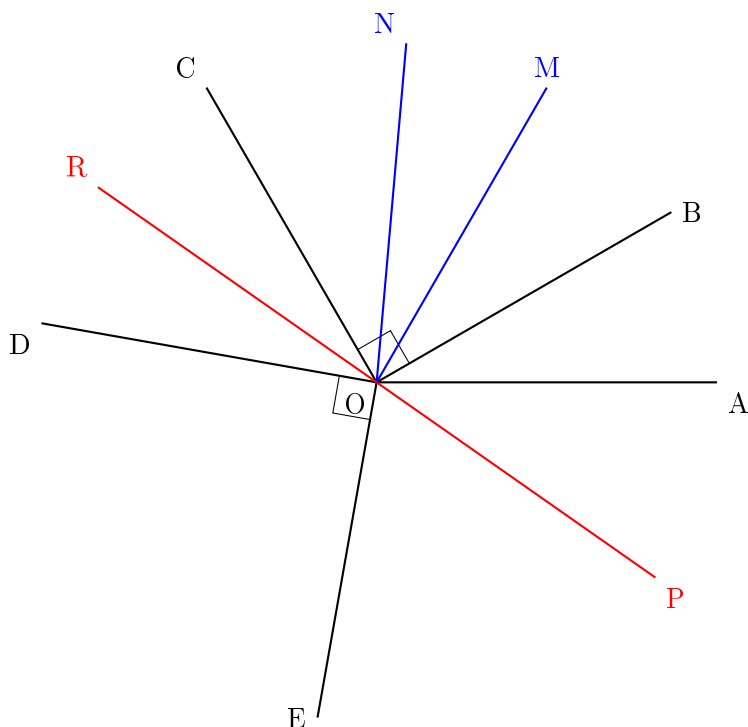
$$\angle AOB < 90^\circ, \quad \angle BOC = \angle DOE = 90^\circ, \quad \angle AOE > 90^\circ.$$

Dacă  $OM$  și  $ON$  sunt bisectoarele unghiurilor  $AOC$ , respectiv  $AOD$ , să se demonstreze că:

a) bisectoarele unghiurilor  $COD$  și  $EOB$  sunt semidrepte opuse.

b)  $\angle BOM + \angle AON - \frac{\angle COD}{2} = 90^\circ$ .

**Soluție.** Desen figura .....5P



a) Fie  $OP$  bisectoarea unghiului  $\angle EOB$  și  $OR$  bisectoarea unghiului  $\angle COD$ . Unghiurile  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$  în jurul punctului  $O$  formează un cerc complet, deci suma lor este  $360^\circ$ . Avem:  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360^\circ$

$$\angle POB = \frac{\angle EOB}{2}$$

$$\angle COR = \frac{\angle COD}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle POR &= \angle POB + \angle BOC + \angle COR \\ &= \frac{\angle EOB}{2} + \angle BOC + \frac{\angle COD}{2} \dots\dots 4P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle EOB &= \angle EOA + \angle AOB \\ \angle POR &= \frac{\angle EOA + \angle AOB}{2} + \angle BOC + \frac{\angle COD}{2} \end{aligned}$$

.....4P

Stim că:  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360^\circ$

Deoarece  $\angle BOC = \angle DOE = 90^\circ \Rightarrow \angle POR = 180^\circ$ . Deci bisectoarele unghiurilor  $\angle COD$  și  $\angle EOB$  sunt semidrepte opuse.....2P

$$b) \angle AON = \frac{\angle AOD}{2}$$

$$\angle AOM = \frac{\angle AOC}{2}$$

$$\angle BOM = \frac{\angle AOC}{2} - \angle AOB \dots\dots 2P$$

$$\angle AOD = \angle AOB + 90^\circ + \angle COD$$

$$\begin{aligned} \angle BOM + \angle AON - \frac{\angle COD}{2} &= \frac{\angle AOB + 90^\circ + \angle COD}{2} + \frac{\angle AOB + \angle AOC}{2} - \angle AOB - \frac{\angle COD}{2} \\ &= 90^\circ \dots\dots 5.5P \end{aligned}$$

#### Subiectul 4.

Aflați numerele naturale  $x$  cu proprietatea că  $35 \mid x^3 + 6$  și  $2x^3 + 12 \mid 280$ .

**Soluție.**  $x^3 + 6 = 35d \dots\dots 4P$

$$2x^3 + 12 = 70d \dots\dots 3P$$

$$70d \mid 280 \Rightarrow d \mid 4 \dots\dots 3P$$

Deci  $d \in \{1, 2, 4\} \dots\dots 3P$

Pentru  $d = 1$  obținem  $x^3 = 29$  nu avem soluție naturală.....3P

Pentru  $d = 2$  obținem  $x^3 = 64$  deci  $x = 4 \dots\dots 3P$

Pentru  $d = 4$  obținem  $x^3 = 276$  nu avem soluție naturală.....3P

Unica soluție este  $x = 4 \dots\dots 0.5P$

**OBSERVAȚIE:** Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.