

Olimpiada Națională de Matematică**Faza locală - Dâmbovița****7 februarie 2026****CLASA A V-A - Barem de corectare****Subiectul 1.**

a) Determinați toate perechile de numere naturale (n, p) care verifică egalitatea

$$(n+1)(n+2p) = 1 + 2 + 3 + 4$$

b) Determinați câte perechi de numere naturale (n, p) verifică egalitatea

$$(n+1)(n+2p) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2026$$

Soluție. a) Avem $(n+1)(n+2p) = 10$, deci $n+1$ e divizor al lui 10.

4.5 puncte

Dacă $n+1 = 1$, atunci $n+2p = 10$ și $n = 0$, deci $p = 5$ și obținem perechea $(0, 5)$. Dacă $n+1 = 2$, atunci $n+2p = 5$ și $n = 1$, de unde $p = 2$ și a doua pereche e $(1, 2)$. Dacă $n+1 = 5$, atunci $n+2p = 2$ și $n = 4$, nu se poate, și dacă $n+1 = 10$ atunci $n+2p = 1$ și $n = 9$, din nou nu se poate. Deci singurele perechi sunt $(0, 5)$ și $(1, 2)$.

6.5 puncte

b) Avem $(n+1)(n+2p) = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027$, deci $n+1$ și $n+2p$ sunt divizori ai numărului $1013 \cdot 2027$

3.5 puncte

Numerele $n+1$ și $n+2p$ sunt de parități diferite. Deci unul trebuie să fie par, iar celălalt impar. Dar numărul $1013 \cdot 2027$ este impar.

7 puncte

Deci nu există perechi de numere (n, p) ca în enunț.

1 punct

Subiectul 2.

Determinați ultimele patru cifre ale numărului $a = 2^{2026} - 2^{2020} - 2^{2019}$.

Soluție. Avem $a = 2^{2019} \cdot (2^7 - 2 - 1) = 2^{2019} \cdot 125$.

7.5 puncte

Dar $125 = 5^3$ și atunci $a = 2^{2016} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2016} \cdot 1000$, deci ultimele trei cifre ale lui a sunt 000.

7.5 puncte

Cum 2016 e multiplu de 4, rezultă că ultima cifră a lui 2^{2016} este 6. Deci ultimele cifre ale lui a sunt 6000.

7.5 puncte

Subiectul 3.

Aflați toate numerele naturale de trei cifre care împărțite la răsturnatul lor dau câtul 3 și restul 175

Soluție. Fie \overline{abc} numărul căutat. Atunci avem $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175$ și $175 < \overline{cba}$.

2.5 puncte

Din $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ și $\overline{cba} = 100c + 10b + a$ obținem $97a = 20b + 299c + 175$.

2.5 puncte

Avem $a \leq 9$, de unde $299c + 175 \leq 20b + 299c + 175 = 97a \leq 97 \cdot 9 = 873$, deci $299c \leq 698$ deci $c \leq 2$. Cifra c nu poate fi 0 pentru că $\overline{cab} > 175$.

5 puncte

Dacă $c = 1$, obținem $97a = 20b + 474$, de unde rezultă că a e par. Din $\overline{1ba} > 175$ rezultă că $b \geq 7$ și atunci $97a = 20b + 474 \geq 20 \cdot 7 + 474 = 614$, de unde $a > 6$. Singurul număr par mai mare strict decât 6 este 8, care duce la $20b = 302$, fals.

6 puncte

Dacă $c = 2$, atunci obținem $97a = 20b + 773$. Avem $b \geq 0$, de unde $97a = 20b + 773 \geq 773$ de unde $a > 7$. Dacă $a = 8$, atunci $20b = 3$, nu se poate. Dacă $a = 9$, atunci $20b = 100$, de unde $b = 5$.

5 puncte

Deci numărul căutat este 952.

1.5 punct

Subiectul 4.

Aflați numerele naturale p, q, r , știind că $q - p = r - q = 2$ și $2^r = 2^p + 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q$

Soluție. Avem $q = p + 2$ și $r = q + 2 = p + 4$ și atunci $2^{p+4} = 2^p + 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p + 2)$.

4.5 puncte

Obținem $2^{p+4} - 2^p = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p + 2) \Leftrightarrow 2^p \cdot 15 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p + 2)$

4.5 punct

În $2^p \cdot 15$, numărul 3 apare la puterea întâi, deci $p + 2$ nu poate fi mai mare sau egal ca 6 (altfel, în $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p + 2)$ numărul 3 ar apărea la puterea cel puțin 2), iar 5 apare în $2^p \cdot 15$ la puterea 1, deci $p + 2 \geq 5$ (dacă $p + 2 < 5$, atunci în $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p + 2)$ nu ar apărea 5).

11.5 puncte

Deci $p + 2 = 5$, de unde $p = 3, q = 4, r = 6$.

2 puncte

OBSERVAȚIE: Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.