

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

- a) Determinați numărul natural a pentru care: $\frac{2a-3}{4} \in \left(\frac{a-2}{3}; \frac{a+4}{7}\right)$.
- b) Fie x un număr real pozitiv astfel încât $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Calculați $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-5}$.

Supliment G.M. Nr.10/2025

Soluție:

- a) $\frac{a-2}{3} < \frac{2a-3}{4} \Leftrightarrow 4a - 8 < 6a - 9 \Leftrightarrow 1 < 2a \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} \dots\dots\dots 5p$
 $\frac{2a-3}{4} < \frac{a+4}{7} \Leftrightarrow 14a - 21 < 4a + 16 \Leftrightarrow 10a < 37 \Leftrightarrow a < \frac{37}{10} \dots\dots\dots 5p$
 $a \in \{1, 2, 3\} \dots\dots\dots 5p$
- b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25 \dots\dots\dots 5p$
 $\left|x + \frac{1}{x}\right| = 5$ și $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x - 5 = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-5} = -x \dots\dots\dots 5p$
 Atunci $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x} - (-x) = x + \frac{1}{x} = 5 \dots\dots\dots 5p$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

- a) Demonstrați că $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- b) Determinați numerele reale x și y cu proprietatea :
 $(x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) - 2 = 0$.

Soluție:

- a) $3a^2 - 2a + 3 \geq \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \geq 0 \dots\dots\dots 4p$
 $9a^2 - 6a + 1 \geq 0 \dots\dots\dots 3p$
 $(3a - 1)^2 \geq 0$ ceea ce este adevărat pentru orice $a \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 3p$
- b) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \dots\dots\dots 4p$
 $3y^2 - 2y + 3 \geq \frac{8}{3} \Rightarrow (x^2 - x + 1)(3y^2 - 2y + 3) \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2, \forall x, y \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 3p$
 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ și $(3y - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ și $y = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 3p$

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu lungimea muchiei de a cm, iar punctele M, N, P mijloacele segmentelor CC', A'D', respectiv C'D'.

- Aflați cosinusul unghiului format de dreptele BM și NP;
- Aflați aria triunghiului D'AM.

Soluție:

- Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și Q mijlocul lui D'D $\Rightarrow AQ \parallel BM$ și $NP \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(BM, NP) = \sphericalangle(AQ, AC) = \sphericalangle CAQ \dots\dots\dots 4p$

$\Delta QDA \equiv \Delta QDC \Rightarrow QA \equiv QC \Rightarrow \Delta QAC$ isoscel $\dots\dots\dots 2p$

$QA = \frac{a\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots 2p$

$\cos \sphericalangle CAQ = \frac{AO}{AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \dots\dots\dots 2p$
- $D'A = a\sqrt{2}$ cm $\dots\dots\dots 2p$

$D'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ cm $\dots\dots\dots 2p$

$AM = \frac{3a}{2}$ cm $\dots\dots\dots 2p$

$A_{D'AM} = \frac{3a^2}{4}$ cm² $\dots\dots\dots 4p$

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Se consideră tetraedrul ABCD în care E, F, G mijloacele segmentelor AC, BE, respectiv ED, BC \cap AF = {M}, AG \cap DC = {N}.

- Arătați că MN \parallel (BAD) ;
- Dacă P și Q sunt simetricile punctelor A față de B, respectiv D arătați că dreptele MP, NQ și AC sunt concurente.

Soluție:

- Fie EH \parallel AM \Rightarrow EH linie mijlocie în triunghiul AMC \Rightarrow H mijlocul lui MC

FM \parallel EH și F mijlocul lui BE \Rightarrow FM linie mijlocie în triunghiul BHE $\dots\dots\dots 4p$

Deci $\frac{CM}{MB} = 2$ și analog $\frac{CN}{ND} = 2 \dots\dots\dots 4p$

Rezultă MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel (BAD) $\dots\dots\dots 2p$
- BE linie mijlocie în triunghiul APC \Rightarrow BE \parallel PC $\dots\dots\dots 2p$

F mijlocul lui BE \Rightarrow R mijlocul lui PC, unde $\{R\} = AM \cap PC \Rightarrow$

M centru greutate în triunghiul APC \Rightarrow P, M, E coliniare $\dots\dots\dots 4p$

Analog se demonstrează că Q, N, E coliniare $\dots\dots\dots 2p$

$PM \cap QN \cap AC = \{E\}$, deci dreptele PM, QN, AC concurente $\dots\dots\dots 2p$

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .