

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**Etapa locală – Constanța, 07.02.2026**

**Clasa a VII-a**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**SUBIECTUL 1 (30 puncte)**

Se consideră numerele reale  $A$  și  $B$  definite prin:

$$A = \sqrt{(5 + 3\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{6} - 3\sqrt{3})^2} - \sqrt{10^2 - 2^2}$$

$$B = \frac{(25+10\sqrt{6})^{2025}}{5^{2026}} \cdot \frac{15}{(5+2\sqrt{6})^{2024}}$$

a) Arătați că  $A^{-1} = 5 + 2\sqrt{6}$ .

b) Verificați dacă numărul  $\sqrt{B}$  se poate scrie sub forma  $x + \sqrt{y}$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$ .

c) Determinați partea întreagă a numărului  $C$ , unde  $C = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} - \frac{17\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5}$ .

**Soluție**

a)  $A = |5 + 3\sqrt{3}| - |2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}| - \sqrt{96} \dots\dots\dots(3p)$

$A = 5 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} \dots\dots\dots(3p)$

$A = 5 - 2\sqrt{6} \dots\dots\dots(2p)$

$A^{-1} = \frac{1}{A} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} = 5 + 2\sqrt{6} \dots\dots\dots(2p)$

b)  $B = \frac{5^{2025}(5+2\sqrt{6})^{2025}}{5^{2026}} \cdot \frac{15}{(5+2\sqrt{6})^{2024}} \dots\dots\dots(2p)$

$B = \frac{(5+2\sqrt{6})^{2025}}{5} \cdot \frac{15}{(5+2\sqrt{6})^{2024}} \dots\dots\dots(2p)$

$B = 3(5 + 2\sqrt{6}) = 15 + 6\sqrt{6} \dots\dots\dots(2p)$

$15 + 6\sqrt{6} = (3 + \sqrt{6})^2 \dots\dots\dots(2p)$

$\sqrt{B} = \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2} = |3 + \sqrt{6}| = 3 + \sqrt{6}, x = 3 \in \mathbb{N}, y = 6 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(2p)$

c) Din a)  $\Rightarrow A^{-1} = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{A^{-1}}} - \frac{17\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{A} - \frac{17\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots(2p)$

$C = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \frac{17\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots(2p)$

$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} \dots\dots\dots(2p)$

$C = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{17\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{5} = -\frac{12\sqrt{3}}{5} = -\frac{\sqrt{432}}{5} \dots\dots\dots(2p)$

$-21 < -\sqrt{432} < -20 \Leftrightarrow -4,2 < C < -4 \dots\dots\dots(1p)$

$[C] = -5 \dots\dots\dots(1p)$

**SUBIECTUL 2 (20 puncte)**

Fie triunghiul ABC, AM mediană în acest triunghi și punctul O pe segmentul AM astfel încât  $AO = 2MO$ , iar  $A_{\triangle ABM} = 12 \text{ cm}^2$ . Paralela d prin punctul C la latura AB intersectează dreapta BO în punctul F.

- a) Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare, unde  $\{N\} = BO \cap AC$ , iar punctul P este mijlocul segmentului AF.  
b) Calculați aria patrulaterului AONP și aria triunghiului POM.

(Prelucrare SGM nr.11/2025)

**Soluție**

a)  $AO = 2MO$ , AM mediană  $\Rightarrow$  O – centrul de greutate al triunghiului ABC .....(2p)  
 $\{N\} = BO \cap AC \Rightarrow BN$  mediană  $\Rightarrow N$  – mijlocul laturii AC .....(2p)  
 MN – linie mijlocie în  $\triangle BFC \Rightarrow MN \parallel FC$  .....(2p)  
 NP – linie mijlocie în  $\triangle AFC \Rightarrow NP \parallel FC$  .....(2p)  
 $MN \parallel FC, NP \parallel FC \Rightarrow M, N, P$  – coliniare ..... (2p)

b) AM – mediană,  $A_{\triangle ABM} = A_{\triangle ACM} = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 24 \text{ cm}^2$  ..... (2p)

O – centrul de greutate al triunghiului ABC  $\Rightarrow A_{\triangle AON} = 4 \text{ cm}^2$  .....(2p)

$\triangle MCN \equiv \triangle PAN \Rightarrow A_{\triangle APN} = A_{\triangle MCN} = \frac{A_{\triangle ACM}}{2} = 6 \text{ cm}^2$  .....(3p)

$A_{\triangle AONP} = A_{\triangle APN} + A_{\triangle AON} = 10 \text{ cm}^2$  ..... (1p)

$OM = \frac{AM}{3} \Rightarrow A_{\triangle POM} = \frac{A_{\triangle AMP}}{3} = \frac{A_{\triangle ACM}}{3} = 4 \text{ cm}^2$  .....(2p)

**SUBIECTUL 3 (20 puncte)**

a) Demonstrați că nu există niciun număr întreg  $x$  astfel încât  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x}$  să fie număr întreg.

b) Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x}$  este un număr întreg.

**Soluție**

a) Condiții de existență:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \dots\dots\dots(3p)$$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1, 2\}$  .....(2p)

Pentru  $x = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = 1 + \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$  .....(2p)

Pentru  $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{3} + 1 \notin \mathbb{Z}$  .....(2p)

$\Rightarrow$  nu există  $x$  număr întreg astfel încât  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x}$  să fie număr întreg .... (1p)

b) Din inegalitatea mediilor ( $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ ) avem:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} \leq \sqrt{2(2x-1+5-2x)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots(2p)$$

Din  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$  avem:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} \geq \sqrt{(2x-1)+(5-2x)} = \sqrt{4} = 2 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} \leq 2\sqrt{2} < 3 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Cum } (\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = 2 \quad |^2 \Rightarrow \dots\dots\dots(2p)$$

$$\Rightarrow 2x-1 + 2\sqrt{(2x-1)(5-2x)} + 5-2x = 4 \Rightarrow (2x-1)(5-2x) = 0 \dots\dots\dots(1p)$$

$$2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ sau } 5-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \dots\dots\dots(1p)$$

**SUBIECTUL 4 (20 puncte)**

Se consideră dreptunghiul ABCD cu  $AB=3AD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$  și punctele E și F astfel încât  $\triangle EOF$  este isoscel cu baza EF,  $OD = OE$ ,  $E \in \text{Int}(\angle AOB)$  și  $F \in \text{Int}(\angle COB)$ .

- a) Dacă H este simetricul lui B față de mijlocul segmentului EF, demonstrați că H este ortocentrul  $\triangle DEF$ .
- b) Demonstrați că  $\angle DEC \equiv \angle DBC$  și determinați măsura unghiului dintre dreptele DT și AC, unde T este un punct pe segmentul AB astfel încât  $\frac{AT}{AB} = \frac{2}{3}$ .

**Soluție**

- a) ABCD – dreptunghi  $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$  .....(2p)  
 R – mijlocul lui EF, mijlocul BH  $\Rightarrow EBFH$  – paralelogram  $\Rightarrow EB \parallel HF$ ,  $BF \parallel EH$  .....(3p)  
 $EO=BO=OD \Rightarrow \triangle BED$  dreptunghic în E  $\Rightarrow BE \perp DE \Rightarrow FH \perp DE$  .....(3p)  
 $FO=BO=OD \Rightarrow \triangle BFD$  dreptunghic în F  $\Rightarrow BF \perp DF \Rightarrow EH \perp DF$ , dar  $FH \perp DE \Rightarrow$   
 H ortocentrul  $\triangle DEF$  .....(2p)
- b)  $OA = OB = OC = OD = OE = OF \Rightarrow A, B, C, D, E, F$  puncte conciclice .....(1p)  
 $DEBC$  inscriptibil  $\Rightarrow \angle DEC \equiv \angle DBC$  .....(2p)  
 $AB=3AD$ ,  $\frac{AT}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AT=2TB$ ,  $TB=BC=AD$  .....(1p)  
 Fie S simetricul lui B față de punctul C  $\Rightarrow \triangle ADT \equiv \triangle BTS$  (C.C.) .....(2p)  
 $\angle STD$ ,  $\angle T = 90^\circ$ ,  $DT = TS \Rightarrow \angle TDS = 45^\circ$  .....(2p)  
 $DA = SC$ ,  $DA \parallel SC \Rightarrow ACSD$  paralelogram  $\Rightarrow AC \parallel DS \Rightarrow \angle(DT; AC) = \angle(DT; DS) = 45^\circ$  ... (2p)

**Notă:**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .