

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} / 56 \leq 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \leq 448\}$ și

$B = \{y \in \mathbb{N} / 2026 : (y + 1)\}$.

- Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte;
- Aflați câte submulțimi cu cel mult două elemente are mulțimea $C = A \cup B$;
- Arătați că pentru orice $x \in B$ există $y \in A$ astfel încât $(x + y) : 4$.

Soluție

- $56 \leq 2^x(1 + 2 + 2^2) \leq 448 \dots\dots\dots 2p$
 $56 \leq 2^x \cdot 7 \leq 448 \Leftrightarrow 8 \leq 2^x \leq 64 \dots\dots\dots 1p$
 $2^3 \leq 2^x \leq 2^6 \Rightarrow 3 \leq x \leq 6 \dots\dots\dots 1p$
 $A = \{3; 4; 5; 6\} \dots\dots\dots 2p$
 $2026 : (y + 1) \Rightarrow (y + 1) \in \{1; 2; 1013; 2026\} \dots\dots\dots 1p$
 $B = \{0; 1; 1012; 2025\} \dots\dots\dots 2p$
 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ și B sunt mulțimi disjuncte $\dots\dots\dots 1p$
- $C = \{0; 1; 3; 4; 5; 6; 1012; 2025\} \Rightarrow \text{card } C = 8 \dots\dots\dots 2p$
 C are o submulțime cu 0 elemente $\dots\dots\dots 2p$
 C are 8 submulțimi cu 1 element $\dots\dots\dots 2p$
 C are $(7 \cdot 8) : 2 = 28$ submulțimi cu 2 elemente $\dots\dots\dots 2p$
 $\text{Deci } C$ are $1 + 8 + 28 = 37$ submulțimi cu cel mult două elemente $\dots\dots\dots 2p$
- Pentru $x = 0 \in B$ se găsește $y = 4 \in A$ astfel încât $0 + 4 = 4 : 4 \dots\dots\dots 2p$
Pentru $x = 1 \in B$ se găsește $y = 3 \in A$ astfel încât $1 + 3 = 4 : 4 \dots\dots\dots 2p$
Pentru $x = 1012 \in B$ se găsește $y = 4 \in A$ astfel încât $1012 + 4 = 1016 : 4 \dots\dots\dots 2p$
Pentru $x = 2025 \in B$ se găsește $y = 3 \in A$ astfel încât $2025 + 3 = 2028 : 4 \dots\dots\dots 2p$
Prin urmare pentru orice $x \in B$ există $y \in A$ astfel încât $(x + y) : 4 \dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Determinați numere naturale a și b pentru care $4 \cdot (a, b) + [a, b] = a + 25$. Am notat cu (a, b) și $[a, b]$ cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Soluție

- Fie $d = (a; b) \Rightarrow a = d \cdot x, b = d \cdot y, (x; y) = 1, [a, b] = d \cdot x \cdot y, x, y \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2p$
 $4d + dxy = dx + 25 \Leftrightarrow 4d + dxy - dx = 25 \dots\dots\dots 2p$
 $d(4 + xy - x) = 25 \Rightarrow d \in D_{25} = \{1; 5; 25\} \dots\dots\dots 3p$
 $d = 1 \Rightarrow 4 + xy - x = 25 \Rightarrow x(y - 1) = 21 \dots\dots\dots 3p$
Din $x(y - 1) = 21$ și $(x; y) = 1 \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 22); (3; 8); (7; 4); (21; 2)\} \Rightarrow (a; b) \in \{(1; 22); (3; 8); (7; 4); (21; 2)\} \dots\dots\dots 4p$
 $d = 5 \Rightarrow 4 + xy - x = 5 \Rightarrow x(y - 1) = 1 \dots\dots\dots 2p$
Din $x(y - 1) = 1$ și $(x; y) = 1 \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 2)\} \Rightarrow (a; b) \in \{(5; 10)\} \dots\dots\dots 2p$
 $d = 25 \Rightarrow 4 + xy - x = 1$ nu convine $\dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

a) Determinați numărul minim și numărul maxim de divizori ai numărului \overline{abcabc} , știind că \overline{abc} este pătrat perfect.

b) Aflați toate numerele naturale de forma \overline{abcd} care verifică simultan condițiile:

- Numerele $a + c$ și $a + b + c + d$ sunt pătrate perfecte consecutive.
- Numerele $a + b, d - a, b + d$ sunt trei numere prime consecutive, în această ordine.

Soluție

a) $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001$ 2p

$\overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ 2p

Dacă $\overline{abc} \in \{11^2; 13^2\} \Rightarrow \text{Nr. minim divizori} = (1 + 1)(1 + 1)(3 + 1) = 16$3p

Dacă $\overline{abc} = 30^2 \Rightarrow \overline{abcabc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow \text{Nr. maxim de divizori} =$

$(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$ 3p

b) Dacă toate sunt impare $\Rightarrow a + b + d - a = \text{par}$. Contradicție cu $b + d = \text{prim} > 3$. \Rightarrow
 $a + b = 2 \Rightarrow d - a = 3 \Rightarrow b + d = 5$ 4p

$a + b = 2, a \text{ cifra nenula} \Rightarrow a = b = 1, d = 4$ 3p

$1 + c$ și $6 + c$ pătrate perfecte consecutive $\Rightarrow c = 3$ 2p

$\overline{abcd} = 1134$ 1p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Se consideră punctele A_1, A_2, \dots, A_{15} situate pe cercul $C(O, R)$. Știind că arcele

$\overline{A_1A_2} = x^\circ + 1^\circ, \overline{A_2A_3} = x^\circ + 2^\circ, \overline{A_3A_4} = x^\circ + 3^\circ, \dots, \overline{A_{14}A_{15}} = x^\circ + 14^\circ, \overline{A_{15}A_1} = x^\circ + 15^\circ$

a) Să se demonstreze că semidreapta OA_1 este perpendiculară pe semidreapta OA_{13} .

b) Să se determine măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_4OA_5$ și $\sphericalangle A_8OA_9$.

Soluție

a) $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \dots + \overline{A_{14}A_{15}} + \overline{A_{15}A_1} = 360^\circ$ 2p

$15 \cdot x^\circ + 1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 15^\circ = 360^\circ$ 2p

$15 \cdot x^\circ + 120^\circ = 360^\circ \Rightarrow x^\circ = 16^\circ$ 3p

$\sphericalangle A_1OA_2 = \overline{A_1A_2} = 17^\circ, \sphericalangle A_2OA_3 = \overline{A_2A_3} = 18^\circ, \dots, \sphericalangle A_{14}OA_{15} = 30^\circ, \sphericalangle A_{15}OA_1 = \overline{A_{15}A_1} = 31^\circ$

$\sphericalangle A_1OA_{13} = \sphericalangle A_1OA_{15} + \sphericalangle A_{15}OA_{14} + \sphericalangle A_{14}OA_{13} = 31^\circ + 30^\circ + 29^\circ = 90^\circ \Rightarrow OA_1 \perp OA_{13}$...3p

b) Fie OM bisectoare $\sphericalangle A_4OA_5 \Rightarrow \sphericalangle A_4OM = \sphericalangle MOA_5 = \frac{\sphericalangle A_4OA_5}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$ 3p

Fie ON bisectoare $\sphericalangle A_8OA_9 \Rightarrow \sphericalangle A_8ON = \sphericalangle NOA_9 = \frac{\sphericalangle A_8OA_9}{2} = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$ 3p

$\sphericalangle MON = \sphericalangle MOA_5 + \sphericalangle A_5OA_6 + \sphericalangle A_6OA_7 + \sphericalangle A_7OA_8 + \sphericalangle A_8ON$ 2p

$\sphericalangle MON = 10^\circ + 21^\circ + 22^\circ + 23^\circ + 12^\circ = 88^\circ$ 2p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .