

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1 (30 puncte)

Fie numerele $a = 27^{2^3} : 81^6 + 2026^0$, $b = (2^{1+2+3+\dots+20} + 3 \cdot 2^{210}) : 2^{210}$ și $c = (2^5 \cdot 2^8)^4 : 32^{10} - 1^{2026}$.

a) Arătați că $2c = a + b$.

b) Se consideră numărul $n = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2026} + c + 1$. Aflați restul împărțirii numărului $2n + 1$ la 10.

Soluție

a) $a = (3^3)^8 : (3^4)^6 + 1 = 3^{24} : 3^{24} + 1 = 2$ 4p

$b = (2^{(20 \cdot 21) : 2} + 3 \cdot 2^{210}) : 2^{210} = (2^{210} + 3 \cdot 2^{210}) : 2^{210} = (4 \cdot 2^{210}) : 2^{210} = 4$ 4p

$c = (2^{13})^4 : (2^5)^{10} - 1 = 2^{52} : 2^{50} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ 4p

Cum $2c = 6$ și $a + b = 6$, se obține că $2c = a + b$ 3p

b) Se arată că numărul n este egal cu $n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026} = (3^{2027} - 1) : 2$ 5p

$2n + 1 = 2 \cdot (3^{2027} - 1) : 2 + 1 = 3^{2027}$ 5p

Ultima cifră a lui 3^{2027} este 7, deci restul împărțirii numărului $2n + 1$ la 10 este 75p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Numărul n se numește *generos* dacă suma cifrelor lui este mai mare decât suma cifrelor lui $n + 2$. Aflați suma tuturor numerelor *generoase* de două cifre.

Soluție

Fie $n = \overline{ab}$, număr *generos*.

Dacă $n = \overline{a8}$, atunci $n + 2 = \overline{(a+1)0}$, și $a + 1 + 0 < a + 8$, convine.4p

Dacă $n = \overline{a9}$, atunci $n + 2 = \overline{(a+1)1}$, și $a + 1 + 1 < a + 9$, convine.4p

Deci numerele de forma $\overline{a8}$ sau $\overline{a9}$ sunt *generoase*.2p

Dacă $n = \overline{ab}$ cu $b < 8$, avem $n + 2 = \overline{a(b+2)}$ și $a + b + 2 > a + b$, ceea ce nu convine.2p

Suma căutată este $(18 + 28 + 38 + \dots + 98) + (19 + 29 + 39 + \dots + 99) = 1053$8p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Maria are o anumită sumă de bani și se pregătește pentru un concurs de matematică, dar și pentru aniversarea Ioanei. Dacă ar câștiga premiul de 50 de lei la concurs și n-ar merge la aniversare, noua sumă ar fi cubul unui număr natural. Dacă n-ar câștiga nimic la concurs și ar cheltui pentru cadou 50 de lei, noua sumă ar fi pătratul aceluiași număr natural. Ce sumă are Maria?

Soluție

Fie x suma de bani pe care o are Maria.

$$x + 50 = n^3, \quad n \text{ număr natural} \dots\dots\dots 4p$$

$$x - 50 = n^2 \dots\dots\dots 4p$$

$$100 = n^3 - n^2, \quad 100 = n^2(n - 1) \dots\dots\dots 4p$$

Cum $100 = 5^2 \cdot 2^2$, vom avea posibilitățile:

- $n = 1 \Rightarrow 100 = 1 \cdot 0 = 0$, fals
- $n = 2 \Rightarrow 100 = 4 \cdot 1 = 4$, fals
- $n = 5 \Rightarrow 100 = 25 \cdot 4$, adevărat
- $n = 10 \Rightarrow 100 = 100 \cdot 9 = 900$, fals.4p

Prin urmare, $n = 5$ și $x = 25 + 50 = 75$ lei are Maria.4p

SUBIECTUL 4 (20 puncte)

Se consideră șirul $1, 3, 4, 7, 1, 8, \dots$, unde orice termen, începând cu al treilea, este egal cu ultima cifră a sumei ultimilor doi termeni precedenți. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului.

- a) Arătați că S_{25} este pătrat perfect.
- b) Determinați n astfel încât $S_n = 2026$.
- c) Arătați că S_n nu poate avea ultimele patru cifre 2025, oricare ar fi numărul natural nenul n .

G.M. nr.10/2025

Soluție

a) Scriem mai mulți termeni ai șirului și observăm că se repetă din 12 în 122p

$$\text{Calculăm } S_{12} = 1 + 3 + 4 + 7 + 1 + 8 + 9 + 7 + 6 + 3 + 9 + 2 = 60. \dots\dots\dots 2p$$

$$S_{25} = 2 \cdot S_{12} + 1 = 2 \cdot 60 + 1 = 121 = 11^2, \text{ pătrat perfect. } \dots\dots\dots 3p$$

b) Notăm cu $s_r, 0 \leq r < 12$, următoarele sume:

$$s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 1 + 3 = 4, s_3 = 1 + 3 + 4 = 8, s_4 = 1 + 3 + 4 + 7 = 15, s_5 = 16, \dots, s_9 = 46, \dots, s_{11} = 58 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Atunci } n = 12 \cdot k + r \text{ și } S_n = 60 \cdot k + s_r, \quad k \text{ număr natural. } \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Avem } 2026 = 60 \cdot 33 + 46. \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Rezultă } k = 33, s_r = s_9 = 46, \text{ deci } r = 9. \text{ Prin urmare } n = 12 \cdot 33 + 9 = 405 \dots\dots\dots 1p$$

c) Presupunem că există S_n cu ultimele patru cifre 2025.

$$\text{Atunci } S_n = 10000 \cdot p + 2025, \quad p \text{ număr natural. } \dots\dots\dots 2p$$

Cum $S_n = 60k + s_r$, deducem că ultima cifră a lui s_r este 5, deci $s_r = s_4 = 15$, singura
posibilitate.2p

$$\text{Atunci } 10000p + 2025 = 60k + 15, \text{ de unde } 10000p + 2010 = 60k. \dots\dots\dots 1p$$

Se împarte egalitatea la 10 și se obține $1000p + 201 = 6k$, fals, deoarece membrii egalității au parități diferite. Deci, S_n nu poate avea ultimele patru cifre 2025.1p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.