

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a IX-a

secțiunea H2, filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1 (20 de puncte)

a) Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $a, b > 0$, atunci :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

b) Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \quad \forall a, b, c > 0.$$

Soluție:

- a) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \mid \cdot ab(a+b)$, care este pozitiv $\Leftrightarrow bx^2(a+b) + ay^2(a+b) \geq ab(x+y)^2$
 $\Leftrightarrow bx^2(a+b) + ay^2(a+b) \geq ab(x^2 + 2xy + y^2)$5p
 $abx^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + aby^2 - abx^2 - 2abxy - aby^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$5p
- b) din a) $\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} \geq \frac{(a+b)^2}{b+c} \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b)^2}{b+c} + \frac{c^2}{a}$5p
 $\frac{(a+b)^2}{b+c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a + b + c$5p

SUBIECTUL 2 (20 de puncte)

a) Rezolvați ecuația $\left\lfloor \frac{5x+4}{x+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x+7}{x+3} \right\rfloor = 4,3$ cu $x \in (0, \infty)$.

b) Determinați numărul natural, nenul n , care are proprietatea că numărul $a = \left\lfloor \frac{n^3 - n^2 + 1}{3n} \right\rfloor$ este prim.

Soluție:

- a) $\left\lfloor \frac{5x+4}{x+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5(x+1)-1}{x+1} \right\rfloor = \left\lfloor 5 - \frac{1}{x+1} \right\rfloor$. Dar 5 este întreg, deci $\left\lfloor \frac{5x+4}{x+1} \right\rfloor = 5 + \left\lfloor -\frac{1}{x+1} \right\rfloor$3p
 $x \in (0, \infty) \Rightarrow -\frac{1}{x+1} \in (-1, 0) \Rightarrow \left\lfloor -\frac{1}{x+1} \right\rfloor = -1$, deci $\left\lfloor \frac{5x+4}{x+1} \right\rfloor = 5 - 1 = 4$2p
 $\left\lfloor \frac{2x+7}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(x+3)+1}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{1}{x+3} \right\rfloor$. Dar 2 este întreg, deci $\left\lfloor \frac{2x+7}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x+3} \right\rfloor$3p
 Ecuația devine $4 + \frac{1}{x+3} = 4,3$, care are soluția $x = \frac{1}{3} \in (0, \infty)$2p

b) Vom considera 3 cazuri pentru numărul n .

Cazul 1. Dacă $n = 3k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = \left\lfloor \frac{27k^3 - 9k^2 + 1}{9k} \right\rfloor = \left\lfloor 3k^2 - k + \frac{1}{9k} \right\rfloor =$

$= 3k^2 - k + \left\lfloor \frac{1}{9k} \right\rfloor$, dar $\frac{1}{9k} \in (0, 1)$, deci $\left\lfloor \frac{1}{9k} \right\rfloor = 0$, iar $a = k(3k - 1)$.

Dintre numerele k și $3k - 1$, numărul k este mai mic, deci pentru ca a să fie prim,

e necesar și suficient $k = 1$, iar atunci $n = 3$3p

Cazul 2. Dacă $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 1 = 3k$, iar $a = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{3} + \frac{1}{3n} \right\rfloor = \left\lfloor k(3k + 1) + \frac{1}{3n} \right\rfloor =$

$= k(3k + 1) + \left\lfloor \frac{1}{3n} \right\rfloor$, dar $\frac{1}{3n} \in (0, 1)$, deci $\left\lfloor \frac{1}{3n} \right\rfloor = 0$, iar $a = k(3k + 1)$.

Dintre numerele k și $3k + 1$, numărul k este mai mic, deci pentru ca a să fie prim, e necesar $k = 1$,

dar atunci $a = 4$, care nu este un număr prim.....3p

Cazul 3. Dacă $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n - 2 = 3k$, iar $a = \left\lfloor \frac{n(n-2)}{3} + \frac{n^2}{3n} + \frac{1}{3n} \right\rfloor =$

$= \left\lfloor k(3k + 2) + \frac{3k+2}{3} + \frac{1}{3n} \right\rfloor = \left\lfloor k(3k + 3) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \right\rfloor = k(3k + 3) + \left\lfloor \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \right\rfloor$

Numărul $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \in (0, 1)$, deci $\left\lfloor \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \right\rfloor = 0$.

Atunci $a = 3k(k + 1)$, care nu e prim pentru nicio valoare a lui k

Singura soluție este $n = 3$4p

SUBIECTUL 3 (20 de puncte)

Fie un triunghi oarecare ABC și punctele D, E în planul său, astfel încât $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DA}$.

- a) Demonstrați că $\overrightarrow{BE} = -\frac{7}{9} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b) Fie F , punctul de intersecție a dreptelor BE și AC . Determinați numărul $k \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{FC}$.

Soluție:

- a) Desenul corect, cu $BD = \frac{1}{3}BC$ și $AE = \frac{1}{3}AD$2p
 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} =$3p
 $= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC} =$3p
 $= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{7}{9} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AC}$2p
- b) $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{FC} = k(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) = k(-\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{AC}$3p
 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{AC}$2p
 Conform punctului a) $\overrightarrow{BE} = -\frac{7}{9} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AC}$
 Dacă punctele B, E, F sunt coliniare, atunci vectorii \overrightarrow{BE} și \overrightarrow{BF} au aceeași direcție,.....2p
 deci $\left\{-\frac{7}{9}, \frac{1}{9}\right\}$ sunt direct proporționale cu $\left\{-1, \frac{k}{k+1}\right\}$. Atunci $k = \frac{1}{6}$3p

SUBIECTUL 4 (30 de puncte)

Se consideră un pătrat de latură 1. Se împarte acest pătrat în nouă pătrate egale și se elimină pătratul din mijloc. Se aplică același procedeu de mai multe ori pentru fiecare din pătratele rămase. Notăm cu S_n aria figurii rămase după n pași.

- a) Calculați S_1, S_2, S_3 .
- b) Arătați că $S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Soluție

- a) La pasul 1 se obțin 9 pătrate cu $l_1 = \frac{1}{3}$.
 Prin eliminare rezultă $p_1 = 8$ pătrate, iar $S_1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$5p
 La pasul 2, pătratele obținute vor avea $l_2 = \frac{1}{3^2}$. Din $p_1 = 8$ pătrate, prin împărțire și eliminare se obțin $p_2 = 8(9 - 1) = 8^2$ pătrate, iar $S_2 = 8^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{8^2}{9^2}$5p
 La pasul 3, $l_3 = \frac{1}{3^3}$. Din $p_2 = 8^2$ pătrate, prin împărțire și eliminare se obțin $p_3 = 8^2(9 - 1) = 8^3$ pătrate, iar $S_3 = 8^3 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^3$5p
- b) Observăm că $\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ progresie geometrică cu rația $q_1 = \frac{1}{3}$2p
 $p_{n+1} = p_n(9 - 1) = 8p_n \Rightarrow$ progresie geometrică cu rația $q_2 = 8$2p
 $l_n = l_1 \cdot q_1^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$3p
 $p_n = p_1 \cdot q_2^{n-1} = 8^n$3p
 După n pași avem latura $l_n = \frac{1}{3^n}$ și $p_n = 8^n$ pătrate rămase.....2p
 $S_n = 8^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n$3p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.