

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a IX-a

secțiunea H1 -filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1 (20 puncte)

a) Determinați numerele reale x care verifică egalitatea $|(x+1)^2 - x(x-1)| = 2026$, unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x .

b) Determinați numerele reale x care verifică egalitatea $\left[\frac{2x+5}{3}\right] = 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Soluție:

a) $|x^2 + 2x + 1 - x^2 + x| = 2026 \Rightarrow |3x + 1| = 2026 \dots\dots\dots 5p$

$3x + 1 = 2026 \Rightarrow x = 675$ sau $3x + 1 = -2026 \Rightarrow x = -\frac{2027}{3} \dots\dots\dots 5p$

b) $4 \leq \frac{2x+5}{3} < 5 \Rightarrow 12 \leq 2x + 5 < 15 \dots\dots\dots 5p$

$x \in \left[\frac{7}{2}, 5\right) \dots\dots\dots 5p$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ dată prin termenul general $a_n = 2n + 1, n \in N^*$.

a) Determinați $n \in N^*$ pentru care $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 2026^2 - 1$.

b) Calculați suma $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

c) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = 2^{a_n}, \forall n \in N^*$ este o progresie geometrică și determinați rația.

Soluție:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} = \frac{(3+2n-1)(n-1)}{2} = n^2 - 1 \dots\dots\dots 5p$

$n^2 = 2026^2$ și $n \in N^* \Rightarrow n = 2026 \dots\dots\dots 2p$

b) $S \cdot r = \frac{r}{a_1 a_2} + \frac{r}{a_2 a_3} + \dots + \frac{r}{a_{n-1} a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} =$

$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{(n-1) \cdot r}{a_1 a_n} \dots\dots\dots 5p$

$S = \frac{n-1}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{3(2n+1)} \dots\dots\dots 2p$

c) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1} - a_n} = 2^2 = 4 \Rightarrow (b_n)_{n \geq 1}$ progresie geometrică cu rația $q = 4 \dots\dots\dots 6p$

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CP}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$

b) Arătați că $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

c) Deduceți că punctele M, N, P sunt coliniare și precizați valoarea raportului $\frac{MN}{NP}$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$ 7p

b) $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} =$ 3p

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ 4p

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{NP} \Rightarrow$ punctele M, N, P sunt coliniare3p

$\frac{MN}{NP} = \frac{1}{3}$ 3p

SUBIECTUL 4 (30 puncte)

O firmă produce piese metalice. Numărul de piese fabricate zilnic urmează un model controlat: în prima zi se produc **120 de piese** iar producția crește în fiecare zi cu **6 piese** față de ziua precedentă. Se notează cu (a_n) numărul de piese fabricate în ziua a n -a.

a) Câte piese au fost fabricate în primele 30 de zile?

b) Știind că firma are un container care poate stoca maximum 10 000 de piese, determină cea mai mare valoare a lui n pentru care suma pieselor fabricate în primele n zile **nu depășește** capacitatea containerului.

c) După golirea containerului firma schimbă strategia: începând cu ziua 31, producția zilnică scade cu 4 piese pe zi, timp de 10 zile. Știind că firma ambalează piesele în cutii de câte 40 de bucăți, determină câte cutii (complete) se pot umple cu totalul pieselor fabricate în primele 40 de zile?

Soluție:

a) Se observă: $a_1 = 120$, rația $r = 6$ 2p

$a_{30} = a_1 + 29r = 120 + 29 \cdot 6 = 294$ 4p

$S_{30} = \frac{30 \cdot (120 + 294)}{2} = 6210$ piese 4p

b) $a_n = 120 + 6(n - 1) = 6n + 114$ 2p

$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (6n + 234)}{2} = n \cdot (3n + 117)$ 3p

$S_n \leq 10000, S_{41} = 9840 \leq 10000, S_{42} = 10206 > 10000$ 4p

Cea mai mare valoare este $n = 41$ 1p

c) În ziua 31: $a_{31} = 294 - 4 = 290$ 1p

Noul șir: $b_1 = 290, b_{10} = 290 - 9 \cdot 4 = 254$ 3p

$S_{31-40} = \frac{(290 + 254) \cdot 10}{2} = 2720$ piese 2p

Total piese 40 zile: $T = 6210 + 2720 = 8930$ 2p

$[8930/40] = 223$ cutii 2p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .