

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

**Clasa a XII -a**

secțiunea H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

**Barem de evaluare și notare**

**SUBIECTUL 1 (20 de puncte)**

Pe mulțimea  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + xy$ .

- Demonstrați că  $(G, *)$  este grup comutativ.
- Determinați funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $(G, *)$  să fie izomorf cu  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .
- Calculați  $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026}$ .

**Soluție:**

- Parte stabilă .....2p

Asociativitatea .....2p

Elementul neutru,  $e = 0 \in G$  .....2p

Elementele simetrizabile, cu  $x^{-1} = \frac{-x}{x+1} \in G$  .....2p

Comutativitatea și justificare grup abelian.....2p
- $f$  este morfism de grupuri  $\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow b = 1$  .....1p

$f$  este morfism de grupuri  $\Rightarrow f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ ,  $\forall x, y \in G \Rightarrow a^2 = a$  .....2p

$f$  este izomorfism de grupuri  $\Rightarrow f$  bijectivă  $\Rightarrow a = 1$ , deci  $f(x) = x + 1$  .....2p
- Folosind b), inductiv, avem:  $f(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$  .....1p

Pe de altă parte,  $f\left(1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026}\right) = f(1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2026}\right)$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2027}{2026} = 2027$  .....2p

Atunci,  $f\left(1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026}\right) = 1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026} + 1$ ,

deci  $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026} + 1 = 2027 \Rightarrow 1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2026} = 2026$  .....2p

**SUBIECTUL 2 (20 de puncte)**

Se consideră  $(G, \cdot)$  un grup multiplicativ și  $x, y \in G$ .

- Arătați că  $(xyx^{-1})^{2026} = xy^{2026}x^{-1}$ .
- Arătați că dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $(xyx^{-1})^n = e$ , atunci  $y^n = e$ .
- Știind că  $(y^{-1}xy)^4 = e$  și  $xy = yx^2$ , demonstrați că  $(G, \cdot)$  este grup comutativ.

**Soluție:**

- $(xyx^{-1})^{2026} = \underbrace{(xyx^{-1})(xyx^{-1}) \dots (xyx^{-1})}_{\text{de 2026 de ori}} \dots 3p$

$= xy \underbrace{(x^{-1}x)y(x^{-1}x)y \dots (x^{-1}x)y}_{\text{de 2025 de ori paranteza}} x^{-1} \dots 4p$

Cum  $x^{-1}x = e$ ,  $\Rightarrow (xyx^{-1})^{2026} = xy^{2026}x^{-1} \dots 3p$
- Din a), avem  $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1} \dots 2p$

Din ipoteză,  $(xyx^{-1})^n = e$ , deci  $xy^n x^{-1} = e \Leftrightarrow y^n = x^{-1}x \Rightarrow y^n = e \dots 3p$
- Procedând ca la b), din  $(y^{-1}xy)^4 = e \Rightarrow x^4 = e \dots 1p$

Din  $xy = yx^2 \Rightarrow y^{-1}xy = x^2 \dots 1p$

Atunci,  $x^4 = e \Leftrightarrow (x^2)^2 = e \Leftrightarrow (y^{-1}xy)^2 = e \Rightarrow x^2 = e \dots 2p$

Deci,  $(xy)^2 = e \Leftrightarrow xyxy = e \Rightarrow yx = xy$ , deci grupul este comutativ.....1p

**SUBIECTUL 3 (20 de puncte)**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă, astfel încât  $f'(x^3 + 1) = 4x$  și  $f(0) = 2026$ . Fie  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a funcției  $f$ . Calculați:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1}$ .  
 b)  $\int \arctg(F(x)) \cdot f(x) dx$ .

**Soluție:**

a) Notăm  $t = x^3 + 1 \xrightarrow{g(x)=x^3 \text{ inj.}} x = \sqrt[3]{t-1}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 4\sqrt[3]{t-1} \dots\dots\dots 2p$   
 $f(t) \in \int f'(t) dt = \int 4\sqrt[3]{t-1} dt = 3\sqrt[3]{(t-1)^4} + C \Rightarrow f(x) = 3\sqrt[3]{(x-1)^4} + c, c \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$   
 $f(0) = 2026 \Rightarrow c = 2023 \Rightarrow f(x) = 3\sqrt[3]{(x-1)^4} + 2023 \dots\dots\dots 1p$   
 $F$  este primitivă a funcției  $f \Rightarrow F$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$   
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] \xRightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x} = \frac{2023}{2} \dots\dots\dots 4p$

b)  $\int \arctg(F(x)) \cdot f(x) dx = \int \arctg(F(x)) \cdot F'(x) dx \dots\dots\dots 2p$   
 $\xrightarrow{\text{int.părți}} F(x) \cdot \arctg(F(x)) - \int F(x) \cdot \frac{1}{1+F^2(x)} \cdot F'(x) dx \dots\dots\dots 2p$   
 $= F(x) \cdot \arctg(F(x)) - \frac{1}{2} \int \frac{2F(x)}{1+F^2(x)} \cdot F'(x) dx$   
 $= F(x) \cdot \arctg(F(x)) - \frac{1}{2} \int \frac{(1+F^2(x))'}{1+F^2(x)} dx \dots\dots\dots 4p$   
 $= F(x) \cdot \arctg(F(x)) - \frac{1}{2} \ln(1 + F^2(x)) + C \dots\dots\dots 2p$

**SUBIECTUL 4 (30 de puncte)**

O firmă produce un bun al cărui cost marginal (în sute de lei) este descris de funcția  $c: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, c(x) = \sqrt{x} + \ln x$ . Costul total de producție este definit prin:  $C = \int_1^4 c(x) dx$ .

- a) Calculați costul total **în lei**, știind că  $\ln 4 \approx 1,375$  și  $4, (6) \approx 4,6667$   
 b) Costul efectiv al producției este definit prin  $C_{\text{ef}}(k) = k \cdot C + 10 \cdot \ln(k + 1)$ , unde unde  $k > 0$  este un coeficient tehnologic. Determinați costul efectiv pentru  $k = 3$ , **în lei**.  
 c) Firma poate adopta o tehnologie alternativă descrisă de funcția

$$f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b(x - 1)^2, b > 0$$

astfel încât  $\int_1^4 f(x) dx = \frac{C}{2}$ . Determinați valoarea parametrului  $b$ .

**Soluție:**

a)  $C = \int_1^4 (\sqrt{x} + \ln x) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_1^4 \ln x dx \dots\dots\dots 1p$

$$\int_1^4 x^{1/2} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left( 4^{3/2} - 1 \right) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3} = 4, (6) \dots\dots\dots 4p$$

$$\int_1^4 \ln x dx = [x \ln x - x]_1^4 = \dots\dots\dots 4p$$

$$= (4 \ln 4 - 4) - (1 \ln 1 - 1) = 4 \ln 4 - 3 \dots\dots\dots 2p$$

Folosim  $\ln 4 \approx 1,375 \Rightarrow 4 \ln 4 \approx 5,5$ , deci:

$$\int_1^4 \ln x dx \approx 5,5 - 3 = 2,5 \dots\dots\dots 2p$$

$$C = \frac{14}{3} + 2,5 \approx 4,6667 + 2,5 = 7,1667 \text{ sute de lei} = 716,67 \text{ lei} \dots\dots\dots 2p$$

b)  $C_{\text{ef}}(3) = 3 \cdot 7,1667 + 10 \cdot \ln 4 \dots\dots\dots 2p$

Folosind  $\ln 4 \approx 1,375$ , avem:

$$C_{\text{ef}}(3) = 21,5001 + 13,75 = 35,2501 \text{ sute de lei} \dots\dots\dots 2p$$

$$C_{\text{ef}}(3) \approx 3525,01 \text{ lei} \dots\dots\dots 1p$$

c)  $\int_1^4 b(x - 1)^2 dx = b \cdot \int_1^4 (x - 1)^2 dx \dots\dots\dots 2p$

Schimbăm variabila:  $u = x - 1$ , deci:

$$\int_0^3 u^2 du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9 \dots\dots\dots 6p$$

$$\Rightarrow b \cdot 9 = \frac{C}{2} = \frac{7,1667}{2} = 3,58335 \Rightarrow b = \frac{3,58335}{9} = 0,39815 \dots\dots\dots 2p$$

**Notă:**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.