

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a XII-a

secțiunea H1 – filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1 (20 puncte)

Se consideră mulțimea de matrice $M = \{A(x) | x \in R\}$, unde: $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2+x}{2} & x & 1 \end{pmatrix}$.

- Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice $x, y \in R$.
- Se consideră matricele $A(1), A(2), A(3), \dots, A(2026)$. Calculați determinantul $P = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2026)$.
- Demonstrați că funcția $f: R \rightarrow M, f(x) = A(x)$, este un izomorfism între grupul aditiv $(R, +)$ și grupul multiplicativ (M, \cdot) .

Soluție:

a)

$$A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ \frac{y^2+y}{2} & y & 1 \end{pmatrix} \dots 1p; \text{ Calcul produs } A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ \frac{x^2+x+2xy+y^2+y}{2} & x+y & 1 \end{pmatrix} \dots 3p$$

$$\text{Scrierea } A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ \frac{(x+y)^2+x+y}{2} & x+y & 1 \end{pmatrix} \dots 2p; \text{ Demonstrarea } A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \dots 2p$$

- Conform punctului a) $P = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2026) = A(1+2+3+\dots+2026) = \dots 1p$
 $= A\left(\frac{2026 \cdot 2027}{2}\right) = A(1013 \cdot 2027) \dots 1p$

Deoarece matricea $A(x)$ este matrice triunghiulară, determinantul său este egal cu produsul elementelor de pe diagonală principală. $\det A(x) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \det P = 1 \dots 2p$

- Verificarea că f este morfism: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$; $A(x+y) = A(x) \cdot A(y) \dots 4p$
 f să fie bijectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă și f surjectivă. Finalizare. $\dots 4p$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Se consideră funcția $f: [0, 2] \rightarrow R$, definită prin $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \in [0, 1] \\ \frac{2x}{x^2+1} + m, & x \in (1, 2] \end{cases}$, unde m este un număr real.

- Determinați numărul real m astfel încât f să admită primitive pe intervalul $[0, 2]$.
- Pentru $m=0$ calculați $\int_0^2 f(x) dx$.
- Pentru $m=0$ demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, 2]$.

Soluție:

- a) Pentru a ca f să admită primitive pe $[0, 2]$ este necesar ca aceasta să fie continuă pe $[0, 2]$. Studiem continuitatea în $x=1 \Rightarrow l_s(1) = e$ (1p); $l_d(1) = 1 + m$ (2p). Din condiția de continuitate $\Rightarrow m = e - 1$ (2p).....5p
- b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$ 1p
- $\int_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1$ 2p
- $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \Big|_1^2 = \ln \frac{5}{2}$ 3p
- $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = 1 + \ln \frac{5}{2}$ 1p
- c) Fie $F(x)$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$. F este concavă $\Leftrightarrow F'' < 0$, dar $F''(x) = f'(x)$ 2p
- Pentru $m = 0, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in (1, 2]$ 1p
- $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ 2p
- Deoarece $x \in (1, 2] \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$. Cum $F'' < 0 \Rightarrow F$ este concavă pe $(1, 2]$ 3p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Se consideră $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f_n = \frac{x^n}{x+3}$, unde $n \in \mathbb{N}$ și familia de integrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- a) Calculați $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$.
- b) Demonstrați că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- c) Folosind eventual relația de la b), calculați $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+3} dx$.

Soluție:

- a) $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{x^0}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ 2p
- $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \ln|x+3| \Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$ 3p
- b) $I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx + 3 \int_0^1 \frac{x^n}{x+3} dx$ 1p
- $I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + 3x^n}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+3)}{x+3} dx$ 3p
- $I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} + 0 = \frac{1}{n+1}$ 4p
- c) Pentru $n = 0 \Rightarrow I_1 + 3I_0 = \frac{1}{0+1}$ 2p
- $I_1 + 3I_0 = 1 \Rightarrow I_1 = 1 - 3I_0 = 1 - 3 \ln \frac{3}{4} = 1 - \ln \left(\frac{3}{4} \right)^3$ 3p
- $I_1 = 1 - 3I_0 = 1 - \ln \frac{64}{27} = \ln e - \ln \frac{64}{27} = \ln \frac{27e}{64}$ 2p

SUBIECTUL 4 (30 puncte)

Un produs are prețul inițial P lei. O reducere de $x\%$ transformă prețul în $P \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$. Dacă se aplică succesiv

două reduceri $x\%$ și $y\%$, prețul final devine: $P \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right)$. Pe mulțimea $S = [0, 100]$ se definește operația “ \circ ” (compunerea reducerilor) astfel încât reducerea $x \circ y$ este reducerea unică echivalentă aplicării succesive a lui $x\%$ și $y\%$, adică:

$$P \cdot \left(1 - \frac{x \circ y}{100}\right) = P \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right).$$

- Determinați formula explicită a operației “ \circ ” exprimând $x \circ y$ în funcție de x și y .
- Arătați că pentru orice $x \in [0, 100]$, reducerea combinată $x \circ y$ este o reducere validă, adică $0 \leq x \circ y \leq 100$.
- Pentru ce reduceri $x \in [0, 100]$ există o reducere $y \in [0, 100]$ astfel încât $x \circ y = 0$? Interpretați rezultatul obținut.

Soluție:

a) $P \cdot \left(1 - \frac{x \circ y}{100}\right) = P \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right)$ împărțim la $P, P > 0$ 1p

$$1 - \frac{x \circ y}{100} = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

Dezvoltarea produsului și aducerea la forma $\Rightarrow \frac{x \circ y}{100} = \frac{x + y}{100} - \frac{xy}{10000}$ 5p

$$x \circ y = x + y - \frac{xy}{100} \dots\dots\dots 2p$$

b) $1 - \frac{x \circ y}{100} = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right)$ 1p

Dacă $x, y \in [0, 100]$ atunci $1 - \frac{x}{100} \in [0, 1], 1 - \frac{y}{100} \in [0, 1]$ 2p

Produsul a două numere din $[0, 1]$ este tot din $[0, 1] \Rightarrow 1 - \frac{x \circ y}{100} \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{x \circ y}{100} \leq 1$ 4p

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x \circ y}{100} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \circ y \leq 100 \Rightarrow \text{Reducerea combinată este întotdeauna un proces valid.} \dots\dots 3p$$

c) $x \circ y = x + y - \frac{xy}{100}$. Dacă $x \circ y = 0 \Rightarrow x + y - \frac{xy}{100} = 0 \Rightarrow y \left(1 - \frac{x}{100}\right) = -x$ 2p

Cazul 1: Dacă $x = 100$. Atunci $1 - \frac{x}{100} = 0$, iar $100 \circ y = 100 + y - \frac{100y}{100} = 100 + y - y = 100 \neq 0$

deci nu există y2p

Cazul 2: Dacă $x \in [0, 100]$. Atunci $\frac{x}{100} > 0$ deci $y = \frac{-x}{1 - \frac{x}{100}} \leq 0$. Pentru că $-x \leq 0$ și $1 - \frac{x}{100} > 0$.

Dar $y \in [0, 100]$, deci singura posibilitate este $y = 0$, ceea ce impune $x = 0$ 4p

Concluzie: există $y \in [0, 100]$ cu $x \circ y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și $y = 0$ 1p

Interpretare: O reducere pozitivă nu poate fi “anulată” printr-o altă reducere.1p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.