

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

**Clasa a XI-a**

secțiunea H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

## Barem de corectare și notare

### SUBIECTUL 1 (20 puncte)

Dacă  $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ , iar  $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$ , determinați numărul real  $a_n$  astfel încât să fie adevărată egalitatea  $A^2 + A^3 + \dots + A^n = a_n A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

**Soluție:**

Din  $\varepsilon^3 = 1, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ , obținem  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon^2 & 2 \end{pmatrix} = 2A; A^3 = 2^2 A \dots \dots \dots 6p$

Se demonstrează prin inducție matematică  $A^n = 2^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots \dots \dots 8p$

$A^2 + A^3 + \dots + A^n = (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})A = (2^n - 2)A \Rightarrow a_n = 2^n - 2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots \dots 6p$

### SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Se consideră funcția  $f_k: \mathbb{R} \setminus (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = \sqrt{x^2 + x} - kx$ , unde  $k$  este un număr real fixat.

a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2025}(x)}{f_{2026}(x)}$ .

b) Demonstrați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$

**Soluție:**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2025}(x)}{f_{2026}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2025x}{\sqrt{x^2 + x} - 2026x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2025 \right)}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2026 \right)} = \frac{2024}{2025} \dots \dots \dots 5p$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - k \right) = (1 - k) \lim_{x \rightarrow \infty} x = \begin{cases} -\infty, & k > 1 \\ \infty, & k < 1 \end{cases}, \text{ nu convine} \dots \dots \dots 10p$$

$$k = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots 5p$$

### SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Fie  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln(1+x)(1+2x) \dots (1+nx)$ . Determinați  $n$ , număr natural astfel încât  $915 \leq f(n) \leq 916$ .

**Soluție:**

$$f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln(1+x)(1+2x) \dots (1+nx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+nx)}{2x} \dots \dots \dots 6p$$

$$f(n) = \frac{1+2+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4} \dots \dots \dots 6p$$

$$915 \leq \frac{n(n+1)}{4} \leq 916 \Rightarrow 3660 \leq n(n+1) \leq 3664 \text{ cum } n \text{ număr natural rezultă } n=60 \dots \dots \dots 8p$$

**SUBIECTUL 4 (20 puncte)**

Fie  $A_n$  matricea asociată unei figuri din plan, iar  $c$  este o constantă reală, atunci  $cA$  este matricea asociată noii figuri. Dacă  $c \in (0,1)$ , atunci noua figură este o contracție, iar dacă  $c > 1$ , atunci noua figură este o dilatare a figuri date.

Se consideră pătratul OABC în reperul xOy, unde  $O(0,0)$ ,  $A(2,0)$ ,  $B(2,2)$ ,  $C(0,2)$ . Scrieți  $T$  matricea asociată figuri OABC; determinați matricele asociate noilor figuri (contracție, dilatare) pentru  $c_1 = 2$ , respectiv  $c_2 = \frac{1}{2}$

Notăm cu  $M = T \cdot {}^t\left(\frac{1}{2}T\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , produsul dintre matricea  $T$  și transpusa matricei  $\frac{1}{2}T$ . Arătați că matricea  $M + M^2 + M^3$  este o matrice nesingulară.

**Soluție:**

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 2T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 6p$$

$$M = T \cdot {}^t\left(\frac{1}{2}T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 6p$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 20 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4p$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots 4p$$

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 136 & 122 \\ 122 & 136 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M + M^2 + M^3) = 136^2 - 122^2 \neq 0 \Rightarrow M + M^2 + M^3$$

nesingulară.....10p

**Notă:****Se acordă 10 puncte din oficiu.****Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .**