

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 07.02.2026

Clasa a X-a

secțiunea H2 - filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

**Barem de corectare și notare**

**SUBIECTUL 1 (20 puncte)**

1) Se consideră  $A$  o mulțime de numere reale care satisface simultan proprietățile:

a)  $1 \in A$ ;      b)  $\sqrt[3]{x} \in A \Rightarrow (1+x) \in A$ ;      c)  $x \in A \Rightarrow \sqrt{x} \in A$ .

Arătați că  $3 \in A$  și  $(1+2\sqrt{2}) \in A$ .

2) Să se arate că  $\log_a \frac{2b}{a+b} + \log_b \frac{2a}{a+b} \geq 0, \forall a, b \in (0, 1)$ .

**Soluție:**

1)  $1 = \sqrt[3]{1} \in A$  ..... 1p

Din (b)  $\Rightarrow 1+1=2 \in A$ , deci  $\sqrt[3]{8} \in A \Rightarrow 8+1=9 \in A \xrightarrow{c)} \sqrt{9}=3 \in A$  ..... 4p

$2 \in A \xrightarrow{c)} \sqrt{2} \in A \Rightarrow \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} \in A$  ..... 3p

Din (b)  $\Rightarrow 1+(\sqrt{2})^3 \in A \Rightarrow 1+2\sqrt{2} \in A$  ..... 2p

2)  $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$  ..... 2p

Cum  $a \in (0, 1) \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab}$  și analog  $\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab}$  ..... 3p

Deci  $1 + \log_a \frac{2b}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$  și  $1 + \log_b \frac{2a}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_b a)$  ..... 2p

Prin sumare:  $2 + \log_a \frac{2b}{a+b} + \log_b \frac{2a}{a+b} \geq 1 + \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a)$

Cum  $\log_a b + \log_b a \geq 2$ , prin înlocuire rezultă inegalitatea de demonstrat..... 3p

**SUBIECTUL 2 (20 puncte)**

1) Fie  $z \in \mathbb{C}^*$  cu  $|z| = |z-4|$  și  $z^2 = -5+12i$ . Să se calculeze  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$ .

2) Fie  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ,  $z_1 \neq z_2$  și  $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . Să se arate că  $|z_1 + az_2| = |az_1 + z_2|$  dacă și numai dacă  $|z_1| = |z_2|$ .

**Soluție:**

1)  $z^2 = -5+12i \Rightarrow z_1 = 2+3i, z_2 = -2-3i$  ..... 4p

Relația  $|z| = |z-4|$  este verificată doar de  $z = 2+3i$  ..... 4p

Atunci  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 5$  ..... 2p

2)  $|z_1 + az_2| = |az_1 + z_2| \Leftrightarrow |z_1 + az_2|^2 = |az_1 + z_2|^2$  ..... 2p

$\Leftrightarrow (z_1 + az_2)(\overline{z_1 + az_2}) = (az_1 + z_2)(\overline{az_1 + z_2})$  ..... 2p

$\Leftrightarrow |z_1|^2(a^2 - 1) = |z_2|^2(a^2 - 1)$  ..... 4p

$\Leftrightarrow_{a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}} |z_1| = |z_2|$  ..... 2p

### SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Pentru un număr real  $a > 1$ , se consideră familia de funcții  $f_a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_a(x) = \sqrt{a^{2x} - 2a^x + 5}$ .

a) Arătați că  $f_a$  este injectivă;

b) Determinați  $B = \text{Im } f_a$ .

c) Se consideră  $g_a : [0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ ,  $g_a(x) = f_a(x)$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$  și  $a > 1$ . Calculați, dacă există,  $g_3^{-1}(2\sqrt{2})$ .

#### Soluție:

a) Fie  $x, y \in [0, \infty)$ .

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow (a^x - a^y)(a^x + a^y - 2) = 0 \dots\dots\dots 5p$$

Cum  $a^x + a^y - 2 \geq 0, \forall a > 1$  și  $x, y \geq 0 \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow x = y$ , deci  $f$  este injectivă..... 5p

b)  $y \in B \Leftrightarrow$  ecuația  $\sqrt{a^{2x} - 2a^x + 5} = y$  are soluții reale pozitive

$\Leftrightarrow$  ecuația  $t^2 - 2t + 5 - y^2 = 0$  are soluții  $t \geq 1$ ,  $t = a^x$  ..... 2p

$\Leftrightarrow y^2 \geq 4 \Leftrightarrow y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ . Dar  $y \geq 0$  deci  $B = [2, \infty)$  ..... 3p

c) Din a) și b) se obține că  $g_a^{-1} : [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $g_a(x) = f_a(x)$  este bijectivă, deci inversabilă ..... 2p

Inversa este  $g_a^{-1} : [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $g_a^{-1}(x) = \log_a(1 + \sqrt{x^2 - 4})$ ,  $g_3^{-1}(2\sqrt{2}) = \log_3(1 + \sqrt{4}) = 1$  ..... 3p

### SUBIECTUL 4 (30 puncte)

În anul 1798, economistul englez Malthus a propus un model de creștere al unei populații  $x$  într-un timp  $t$ , exprimat prin funcția  $x(t) = x_0 \cdot e^{r \cdot t}$ , unde  $x_0$  reprezintă valoarea inițială a populației,  $r$  este rata de creștere, o constantă ce reprezintă viteza cu care o populație se modifică în timp, iar  $t$  este timpul, măsurat în zile.

Un film postat pe canalul YouTube a avut 80 de vizualizări în ziua postării, cu o rată anuală de creștere de 20%, ce reflectă interesul publicului pentru film.

a) Aflați câte vizualizări a avut filmul în primele 15 zile de la postare.

b) În câte zile va ajunge filmul la un million de vizualizări?

c) În 200-a de zi de la postare, se constată că sunt 3200000 de vizualizări. Aflați dacă interesul pentru filmul postat s-a modificat.

**Precizare.** În calcule, se vor utiliza următoarele estimări:  $e \approx 2,7$ ,  $\ln 2 \approx 0,6$ ,  $\ln 5 \approx 1,6$ .

#### Soluție:

a) Pentru situația prezentată, funcția este  $x(t) = 80 \cdot e^{0,2 \cdot t}$  deci  $x(15) = 80 \cdot e^{0,2 \cdot 15} = 80 \cdot e^3$  ..... 5p  
 $\approx 80 \cdot 19,6 = 1568$  (vizualizări) ..... 5p

b)  $1000000 = 80 \cdot e^{0,2 \cdot t} \Leftrightarrow 12500 = e^{0,2 \cdot t}$  ..... 5p  
 $\Leftrightarrow \ln(5^5 \cdot 2^2) = 0,2 \cdot t$  deci  $8 + 1,2 = 0,2 \cdot t \Rightarrow t = 46$  (zile) ..... 5p

c) Fie  $s$  rata de creștere din a 200-a zi.

$x(200) = 80 \cdot e^{s \cdot 200} = 3200000 \Leftrightarrow e^{s \cdot 200} = 40000 \Rightarrow s \cdot 200 = \ln(40000) \Leftrightarrow s \cdot 200 = \ln(2^6 \cdot 5^4)$  ..... 5p

$s = 0,05 < 0,2 = r$  deci interesul a scăzut..... 5p

#### **Notă:**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.