

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 7.02.2026

Clasa a X-a

secțiunea H1 – filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1 (20 puncte)

Se dau numerele:

$$a = 16^{-\frac{5}{4}} \cdot 8^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{1}{0,25}\right)^5 \quad \text{și} \quad b = (0,1)^4 \cdot (10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}} - 2.$$

a) Aflați numerele a și b .

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b .

Soluție:

a) $a = (2^4)^{-\frac{5}{4}} \cdot (2^3)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2^2)^5 = 2^{-5} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{10} = 2$ 7p

$b = (10)^{-4} \cdot 10^6 - 2 = 10^2 - 2 = 98$ 7p

b) $m_a = 50$ 3p

$m_g = 14$ 3p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

a) Calculați $A = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{2+\sqrt{2}} + \log_2 \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log_2 \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

b) Demonstrați că, dacă $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ și $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, atunci $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$, unde $a, b, c \in (0; +\infty) - \{8\}$.

Soluție:

a) $\log_2 \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log_2 \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \log_2 \sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})} = \log_2 \sqrt{4-(2+\sqrt{2})}$
 $= \log_2 \sqrt{2-\sqrt{2}}$ 3p

$\log_2 \sqrt{2+\sqrt{2}} + \log_2 \sqrt{2-\sqrt{2}} = \log_2 \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \log_2 \sqrt{4-2} = \log_2 \sqrt{2}$ 3p

Rezultă $A = 2 \log_2 \sqrt{2} = \log_2 (\sqrt{2})^2 = 1$ 3p

b) $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}} \Rightarrow \log_8 b = \log_8 \left(8^{\frac{1}{1-\log_8 a}} \right) \Rightarrow \log_8 b = \frac{1}{1-\log_8 a}$ 3p

$c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}} \Rightarrow \log_8 c = \log_8 \left(8^{\frac{1}{1-\log_8 b}} \right) \Rightarrow \log_8 c = \frac{1}{1-\log_8 b}$ 3p

Obține: $1 - \log_8 c = 1 - \frac{1}{1-\log_8 b} = \frac{-\log_8 b}{1-\log_8 b}$, de unde $\frac{1}{1-\log_8 c} = \frac{\log_8 b - 1}{\log_8 b} = \frac{\frac{1}{1-\log_8 a} - 1}{\frac{1}{1-\log_8 a}} = \log_8 a$ 4p

Rezultă $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$ 1p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

a) Fie $z = \frac{1-2i}{-1+i}$. Determinați $\operatorname{Re}(z)$, \bar{z} și $|z|$.

b) Determinați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $z^2 - (4m+i)z + 2mi + m + 3 = 0$ are o soluție reală, apoi rezolvați ecuația în fiecare dintre situațiile găsite.

Soluție:

$$\text{a) } z = \frac{(1-2i)(-1-i)}{(-1)^2 - i^2} = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Obține } \operatorname{Re}(z) = -\frac{3}{2} \text{ și } \bar{z} = -\frac{3-i}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

b) Fie $a \in \mathbb{R}$ o soluție reală a ecuației date. Rezultă $a^2 - (4m+i)a + 2mi + m + 3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$$\text{Deci } (a^2 - 4ma + m + 3) + (2m - a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4ma + m + 3 = 0 \\ 2m - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m^2 + m + 3 = 0 \\ a = 2m \end{cases}, \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{de unde obținem } m = 1 \text{ sau } m = -\frac{3}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Pentru } m = 1 \Rightarrow z^2 - (4+i)z + 2i + 4 = 0 \text{ cu } \Delta = -1 \text{ și soluțiile } z_1 = 2, z_2 = 2+i \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Pentru } m = -\frac{3}{4} \Rightarrow z^2 - (-3+i)z - \frac{3}{2}i + \frac{9}{4} = 0 \text{ cu } \Delta = -1 \text{ și soluțiile } z_1 = -\frac{3}{2}, z_2 = -\frac{3}{2} + i \dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL 4 (30 puncte)

În organism, cantitatea unui medicament scade exponențial. Se știe că după 6 ore rămâne jumătate din cantitatea inițială (timp de înjumătățire 6h). Inițial au fost administrate 240 mg.

a) După câte ore cantitatea de medicament scade sub 40 mg pentru prima dată?

b) Determinați după câte ore cantitatea de medicament este exact 15 mg.

Soluție:

$$\text{a) } 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} < 40 | : 240 \dots\dots\dots 5p$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} < \frac{1}{6} \Rightarrow 2^{t/6} > 6 \dots\dots\dots 5p$$

$$2^2 = 4 < 6 < 8 = 2^3 \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{t}{6} > 2 \Rightarrow t > 12 \Rightarrow \text{după 12 ore} \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{După a 13 oră cantitatea} < 40 \text{ mg.} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{b) } 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} = 15 | : 240 \dots\dots\dots 4p$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} = \frac{15}{240} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4} \dots\dots\dots 4p$$

$$-\frac{t}{6} = -4 \Rightarrow \frac{t}{6} = 4 \Rightarrow t = 24 \text{ Răspuns: 24 ore} \dots\dots\dots 4p$$

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător .