



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07 FEBRUARIE 2026

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Fie $x, y \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y\sqrt{2} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Să se rezolve ecuația : $|x-3| \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} - |y-1| = 0$ unde $x, y \in \mathbb{Q}$.

Prof. Relu Ciupea, Oltenița

Soluție:

a) \Rightarrow Dacă $y \neq 0$, ar rezulta că $\sqrt{2} = -\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, contradicție. $\Rightarrow y = 0$ și apoi $x = 0$. (5 p)

\Leftarrow Dacă $x = y = 0$, evident. (5 p)

b) $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ (3 p)

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \quad (2 \text{ p})$$

$$(1-|y-1|) + (|x-3|-1)\sqrt{2} = 0$$

$$\xrightarrow{a)} 1-|y-1| = 0 \text{ și } |x-3|-1 = 0 \quad (5 \text{ p})$$

$$|y-1| = 1 \Rightarrow y \in \{0, 2\}$$

$$|x-3|-1 = 0 \Rightarrow x \in \{2, 4\}$$

$$S = \{(2, 0), (2, 2), (4, 0), (4, 2)\} \quad (5 \text{ p})$$

Problema 2. a) Se dă numărul

$$a = (\sqrt{1^2+1+1} - \sqrt{1^2-1+1}) + (\sqrt{2^2+2+1} - \sqrt{2^2-2+1}) + (\sqrt{3^2+3+1} - \sqrt{3^2-3+1}) + \dots + (\sqrt{2026^2+2026+1} - \sqrt{2026^2-2026+1}). \text{ Arătați că } a \leq 2026.$$

b) Determinați toate numerele naturale n pentru care $n^4 + n^2 + 1$ este pătrat perfect.

Prof. Cristina Emilia Bornea, Călărași

Soluție:

$$a) \quad n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + (n-1) + 1$$

$$\text{Dacă } \sqrt{n^2+n+1} \not\in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n^2-n+1} \not\in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \dots + a_{2026} - \cancel{a_{2025}} = a_{2026} - a_0$$

$$a = \sqrt{2026^2+2026+1} - 1 \quad (5 \text{ p})$$

$$\text{Cum } \sqrt{n^2+n+1} = \sqrt{(n+1)^2 - n} \leq \sqrt{(n+1)^2} = n+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2026^2+2026+1} - 1 \leq 2026+1-1 = 2026 \quad (5 \text{ p})$$

b) Presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n^4 + n^2 + 1 = m^2$ (2 p)

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1). \quad n^2 + n + 1 \not\mid x, n^2 - n + 1 \not\mid y \quad (3 \text{ p})$$

Relația devine $x \cdot y = m^2$ și $x - y = 2n$. Presupunem că $\exists d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d \mid x$ și $d \mid y$

$$\Rightarrow d \mid x - y \Rightarrow d \mid 2n. \text{ Dacă } d \mid n \Rightarrow d \mid n(n+1) \Rightarrow d \mid x - n(n+1) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d \in \{1, 2\}. \text{ Cum } x \text{ și } y \text{ sunt numere impare} \Rightarrow d = 1 \text{ și } (x, y) = 1.$$

$$x \cdot y = m^2 \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = p^2, y = q^2.$$

$$\text{Pentru } n \geq 2, (n-1)^2 < y < n^2$$

$$(n^2 - n + 1) - (n-1)^2 = n \geq 2 > 0, n^2 - (n^2 - n + 1) = n - 1 \geq 1 > 0$$

Rezultă că $(n^2 - n + 1)$ nu este pătrat perfect pentru $n \geq 2$. (3 p)

Pentru $n = 1 \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 = 3$ - nu este pătrat perfect.

Pentru $n = 0 \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 = 1$ - pătrat perfect.

Soluție unică $n = 0$.

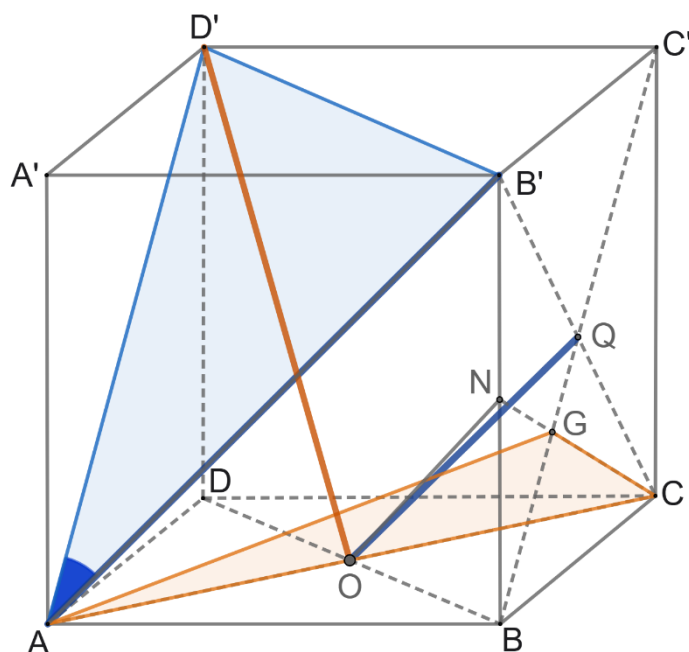
(2 p)

Problema 3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$ se consideră O , centrul bazei $ABCD$, G - centrul de greutate al triunghiului BCB' și, Q - centrul feței $BCC' B'$.

- Demonstrați că $OQ \parallel (AB' D')$.
- Determinați măsura unghiului format de dreptele OQ și AD' .
- Demonstrați că $D' O \perp (AGC)$.

Prof. Cristina Emilia Bornea, Călărași

Soluție:



a) Cum OQ -linie mijlocie în triunghiul ACB'

$$\Rightarrow OQ \parallel AB', AB' \subset (AB' D'), OQ \not\subset (AB' D') \Rightarrow OQ \parallel (AB' D')$$

(5p)

b) Cum OQ și AD' -drepte necoplanare, dar $OQ \parallel AB'$

$$\Rightarrow \angle(OQ, AD') = \angle(AB', AD') = \angle(B'AD') \quad (5 \text{ p})$$

$AB' = AD' = B'D' = l\sqrt{2}$ (l-latura cubului) $\Rightarrow \triangle AB'D'$ -triunghi echilateral.

$$\Rightarrow \angle(B'AD') = 60^\circ \Rightarrow \angle(OQ, AD') = 60^\circ. \quad (5 \text{ p})$$

$$\text{c) Fie } AB = l \Rightarrow OB = OD = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BD, AC \perp DD' \\ BD \cap DD' = \{D\}, BD, DD' \subset (BDD') \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (BDD') \quad (5 \text{ p})$$

$$D'O \subset (BDD') \Rightarrow AC \perp D'O.$$

$$\text{Fie } CG \cap BB' = \{N\} \Rightarrow N - \text{mijloc } BB' \Rightarrow BN = \frac{1}{2}l$$

$\triangle NBO$ și $\triangle D'DO$ -triunghiuri dreptunghice.

$$\frac{BN}{OD} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{OB}{DD'} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{BN}{OD} = \frac{OB}{DD'}.$$

Avem că $\triangle NBO \sim \triangle D'DO \Rightarrow \angle NOB \equiv \angle DD'O$. Cum $\angle DOD' + \angle DD'O = 90^\circ \Rightarrow$

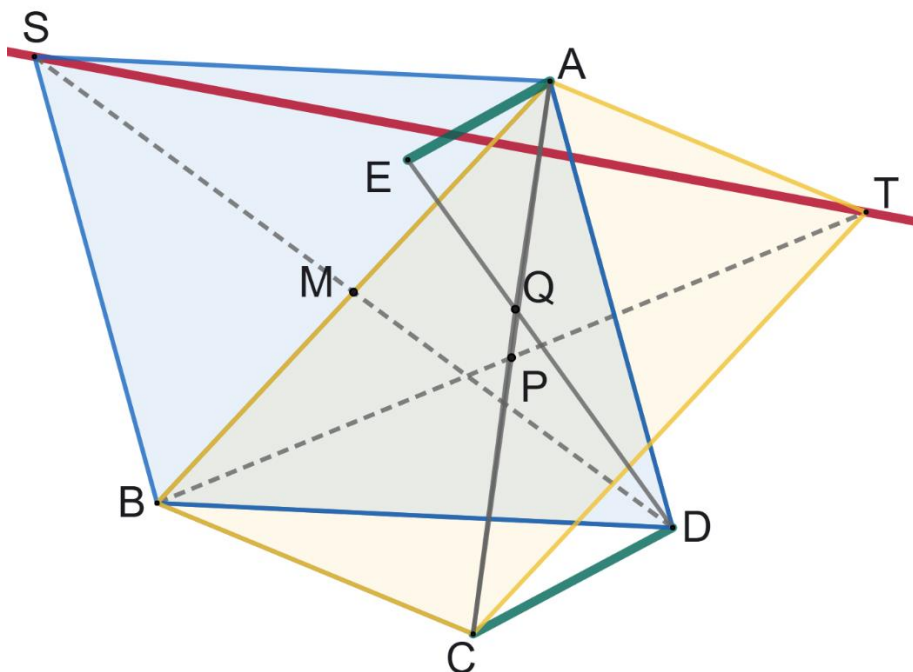
$$\angle NOB + \angle D'DO = 90^\circ \Rightarrow OD' \perp ON.$$

$$ON \subset (AGC), ON \cap AC = \{O\}, ON, AC \subset (AGC) \Rightarrow OD' \perp (AGC). \quad (5 \text{ p})$$

Problema 4. Fie $ABCD$ - tetraedru. Notăm cu M și P -mijloacele muchiilor AB și AC . Fie $Q \in AC$ astfel încât $CQ = 2 \cdot AQ$. Construim punctele S și T , simetricele punctelor D și B față de M respectiv P . Pe semidreapta (DQ) considerăm un punct E astfel încât $DQ = 2 \cdot QE$ și Q este situat între D și E . Arătați că punctele T, E și S sunt coliniare.

Gazeta matematică 6-7-8/2025

Soluție:



(Figura- 3 p)



$$\left. \begin{array}{l} M - \text{mijloc } AB \\ S - \text{sim}_M D \Rightarrow M - \text{mijloc } SD \end{array} \right\} \Rightarrow SBDA - \text{paralelogram}$$

$$\Rightarrow AS \parallel BD, BD \subset (BCD), AS \not\subset (BCD) \Rightarrow AS \parallel (BCD) \quad (3 \text{ p})$$

$$\left. \begin{array}{l} P - \text{mijloc } AC \\ T - \text{sim}_P B \Rightarrow P - \text{mijloc } BT \end{array} \right\} \Rightarrow ABCT - \text{paralelogram}$$

$$\Rightarrow AT \parallel BC, BC \subset (BCD), AT \not\subset (BCD) \Rightarrow AT \parallel (BCD) \quad (3 \text{ p})$$

$$\text{Cum } AS \cap AT = \{A\} \text{ și } AS, AT \subset (AST) \Rightarrow (SAT) \parallel (BCD). \quad (2 \text{ p})$$

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{2}, \frac{EQ}{QD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{EQ}{QD} \xrightarrow{\text{Rec.I.Thales}} AE \parallel CD \quad (3 \text{ p})$$

$$\text{Fie } \{F\} = ST \cap (ACD). \quad \left. \begin{array}{l} (SAT) \cap (ACD) = AF \\ (BCD) \cap (ACD) = CD \\ (SAT) \parallel (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AF \parallel CD \quad (3 \text{ p})$$

$$\text{Cum } AE, AF \subset (ACD) \Rightarrow E = F \text{ și } E \in ST \Rightarrow T, E, S - \text{coliniare}. \quad (3 \text{ p})$$

Problema 1.	Problema 2.	Problema 3.			Problema 4.	Oficiu
a) 10p b) 15p	a) 10p b) 10p	a) 5p	b) 10p	c) 10p	20p	10p