



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07 FEBRUARIE 2026

Clasa a VII-a

Oficiu 10p

Problema 1.

Fie numerele $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$

și $b = \left(3^{51} - 2^{85}\right) + 3^{2011} : 81^{490} : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}$

a) Comparați numerele a și b .b) Verificați dacă mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z}\right\}$ conține elementele $3a$ și \sqrt{b} .

(Supliment G. M. 9/2025)

Soluție.

a)

$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{63}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$	2p
$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{9}}$	2p
$a = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$	2p
$3^{51} - 2^{85} = (3^3)^{17} - (2^5)^{17} = 27^{17} - 32^{17} < 0 \Rightarrow 3^{51} - 2^{85} = 2^{85} - 3^{51}$	2p
$b = (2^{85} - 3^{51} + 3^{2011} : 3^{1960}) : (-2^{82}) + 36 + 8 - 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2^4$	2p
$b = (2^{85} - 3^{51} + 3^{51}) : (-2^{82}) + 36 + 5\sqrt{3} - 8 - 5\sqrt{3} + 16 \Rightarrow b = 2^{85} : (-2^{82}) + 36 - 8 + 16$	2p
$b = -2^3 + 36 - 8 + 16 \Rightarrow b = 36$	2p
$a < b$	1p

b)

$\frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x-5 \mid 3x+1$ Dar $2x-5 \mid 2x-5$	2p
Deci $2x-5 \mid 17 \Rightarrow 2x-5 \in D_{17}$	2p
$2x-5 \in \{-17, -1, 1, 17\} \Rightarrow x \in \{-6, 2, 3, 11\} \Rightarrow A = \{-6, 2, 3, 11\}$	2p
$3a \in A$	2p
$\sqrt{b} \notin A$	2p
Sau verificarea directă $3a \in A$ și $\sqrt{b} \notin A$	5p+5p

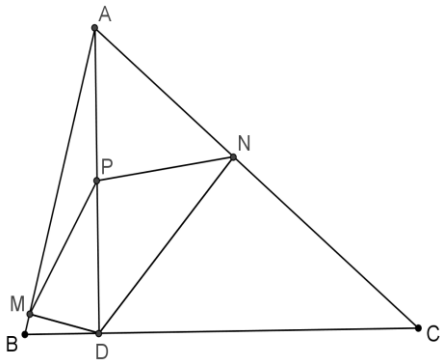
**Problema 2.**

Unghiurile $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ale triunghiului ABC au măsurile direct proporționale cu 3, 5, respectiv 4.

- Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.
- Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DM \perp AB$, $M \in AB$, $DN \perp AC$, $N \in AC$ și P este mijlocul segmentului AD, demonstrați că patrulaterul MDNP are trei laturi congruente.
- Calculați $\left(\frac{NC}{DC} + \frac{DN}{AD}\right)^{2026}$.

(Prof. Constantin Adriana-Gabriela, Călărași)

Soluție.

a) Notăm măsurile unghiurilor cu A, B, C. Din proporționalitate obținem $A = 45^\circ$, $B = 75^\circ$, $C = 60^\circ$	5p
b) MP și PN sunt mediane în triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza AD, deci $MP = NP = \frac{AD}{2}$ În triunghiul dreptunghic ADN, $\sphericalangle DAC = 30^\circ \Rightarrow DN = \frac{AD}{2}$ Deci $MP = NP = DN$	<p>Realizarea desenului</p>  <p>7p</p>

c) În triunghiul dreptunghic DNC în care $\sphericalangle NDC = 30^\circ \Rightarrow \frac{NC}{DC} = \frac{1}{2}$	4p
În triunghiul dreptunghic DNA în care $\sphericalangle NAD = 30^\circ \Rightarrow \frac{DN}{AD} = \frac{1}{2}$	4p
$\left(\frac{NC}{DC} + \frac{DN}{AD}\right)^{2026} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2026} = 1$	2p

Problema 3.

Se consideră expresia $E(n) = \sqrt{(10^n - 2026)^2} - \sqrt{(2025 - 10^n)^2}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

- Determinați valorile expresiei $E(n)$.
- Aflați numerele raționale a și b pentru care $E(n) = \frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1}$, unde $n \geq 4$.

**Soluție**

a) $E(n) = 10^n - 2026 - 2025 - 10^n $	2p
Dacă $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ atunci $10^n - 2026 < 0$ și $2025 - 10^n > 0$	2p
$E(n) = 2026 - 10^n - 2025 + 10^n = 1 \Rightarrow E(n) = 1$	2p
Dacă $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ atunci $10^n - 2026 > 0$ și $2025 - 10^n < 0$	2p
$E(n) = 10^n - 2026 + 2025 - 10^n = -1 \Rightarrow E(n) = -1$	2p

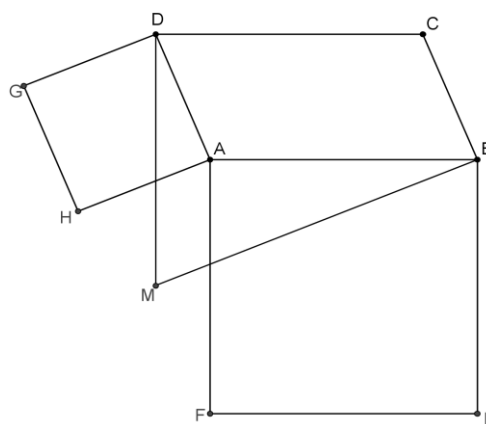
b) $E(n) = \frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1} = \frac{a\sqrt{2}+a+b\sqrt{2}-b}{2-1} = \sqrt{2}(a+b) + a - b$	2p
Pentru $n \geq 4$, $E(n) = -1$, deci $\sqrt{2}(a+b) + a - b = -1 \Rightarrow \sqrt{2}(a+b) = -1 - a + b$	2p
Pentru $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow -1 - a + b \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{2}(a+b) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a+b=0$	4p
$\Rightarrow a = -b \Rightarrow -1 + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$	2p

Problema 4.

Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu unghiul A obtuz și $AB > BC$. Pe laturile AB și AD se construiesc, în exteriorul paralelogramului, pătratele $ABEF$, respectiv $ADGH$. Perpendicularele în D pe DC , respectiv în B pe BC se intersectează în punctul M .

(Prof. Ciupea Relu, Oltenița)

a) Să se arate că $AM \perp BD$



b) Fie N și P picioarele perpendicularelor duse din A pe FH , respectiv din D pe AC .

Demonstrați că punctele N, A și P sunt coliniare.

**Soluție**

a) $ABCD = \text{paralelogram} \Rightarrow AB \parallel DC$ și $BC \parallel AD$	2p
Din $MD \perp DC$ și $AB \parallel DC \Rightarrow MD \perp AB$ (1) Din $MB \perp BC$ și $BC \parallel AD \Rightarrow MB \perp AD$ (2)	5p
Din (1) și (2) rezultă că punctul A este ortocentrul triunghiului MBD , de unde rezultă că $AM \perp BD$. sau M este ortocentrul triunghiului ABD , de unde rezultă că $AM \perp BD$.	3p

b)	1p
<p>În triunghiurile AHF și DAC cunoaștem:</p> <p>$AH = AD$ $AF = AB = DC$ $m(\angle HAF) = 360^\circ - [m(\angle HAD) + m(\angle DAB) + m(\angle BAF)] = 360^\circ - [90^\circ + m(\angle DAB) + 90^\circ] =$ $= 180^\circ - m(\angle DAB) = m(\angle ADC)$</p> <p>Rezultă că cele două triunghiuri sunt congruente ($LU.L.$) $\Rightarrow m(\angle AHF) = m(\angle DAC)$ (Obs: dacă rezolvarea este corectă, fără a face figura pe lucrare, se adaugă 1p)</p>	4p
<p>Deoarece $m(\angle AHF) + m(\angle HAN) = 90^\circ$ și $m(\angle AHF) = m(\angle DAC)$, rezultă că</p> <p>$m(\angle HAN) + m(\angle DAC) = 90^\circ$ $m(\angle NAC) = m(\angle HAN) + m(\angle HAD) + m(\angle DAC) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow N, A, P$ sunt coliniare.</p>	5p

Orice soluție corectă, diferită de cele din barem se punctează corespunzător.