



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07 FEBRUARIE 2026

CLASA a VI-a

OFICIU: 10p

Problema 1.

a) Să se arate că nu există numere de trei cifre divizibile cu 42 care să aibă un număr impar de divizori.

(Supliment G. M. 11/ 2025)

b) Determinați numerele de forma \overline{abcd} cu cifre nenule, știind că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 4, 2, respectiv 3, iar numerele c, d sunt invers proporționale cu 3 și 2.

Soluție

a) Presupunem că există un număr $\overline{abc} : 42$, care are un număr impar de divizori.	2p
Numerele care au un număr impar de divizori sunt pătrate perfecte. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $\overline{abc} : (2 \cdot 3 \cdot 7)$	4p
$\Rightarrow \overline{abc} : (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2) \Rightarrow \overline{abc} : 1784$, contradicție!	4p
b) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ și $c \cdot 3 = d \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ și $\frac{c}{2} = \frac{d}{3}$.	5p
$\Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = \frac{d}{9} \Rightarrow$	5p
$9 \cdot b = 4 \cdot d$, $(9, 4) = 1 \Leftrightarrow b : 4$, $d : 9 \Rightarrow \overline{abcd} = 8469$	5p

Problema 2. Se dau unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle BOD$ astfel încât sunt îndeplinite simultan condițiile:

- $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt suplementare adiacente;
- $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt complementare neadiacente;
- $\frac{\angle AOB}{\angle BOC} = \frac{1}{9}$.

Fie punctul $E \in \text{Int}(\angle BOC)$ astfel încât $EO \perp OC$ și punctul F simetricul lui E față de O .

a) Determinați măsura unghiului AOB .

b) Determinați măsura unghiului DOF .

Soluție

a) Dacă $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 180^\circ$ și $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle BOC} = \frac{1}{9} \Rightarrow 9 \cdot \sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$		5p
$\Rightarrow 9 \cdot \sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle AOB = 18^\circ$		5p
	b) Realizarea desenului	5p
	Unghiurile AOB și BOD complementare	
	$\Rightarrow \sphericalangle BOD = 72^\circ$	2p
	Unghiurile AOB și BOD complementare neadiacente	
	$\Rightarrow \sphericalangle AOD = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ$	3p
$\sphericalangle AOC = 180^\circ, EF \perp CO \Rightarrow OF \perp AC$	2p	
$\sphericalangle DOF = 90^\circ - \sphericalangle AOD = 36^\circ$	3p	



Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x = 3^m \cdot 5^n, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\}$.

- a) Numerele 2025, respectiv 2205 aparțin mulțimii A ? Justificați răspunsul.
 b) Să se demonstreze că oricum am alege 5 numere din mulțimea A , există întotdeauna două al căror produs este pătrat perfect.

prof. Relu Ciupea, Oltenița

Soluție

a) $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow 2025 \in A$	5p
$2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \Rightarrow 2205 \notin A$	5p
b) Elementele mulțimii A pot avea una din următoarele forme: $x_1 = 3^a \cdot 5^b$ $a, b \in \mathbb{N}^*$ a, b ambele pare; $x_2 = 3^c \cdot 5^d$ $c, d \in \mathbb{N}^*$ c, d ambele impare	4p
$x_3 = 3^e \cdot 5^f$ $e, f \in \mathbb{N}^*$ e par și f impar; $x_4 = 3^g \cdot 5^h$ $g, h \in \mathbb{N}^*$ g impar și h par	4p
Dacă alegem 5 numere din mulțimea A , conform principiului lui Dirichlet, există întotdeauna două care vor avea aceeași formă. Efectuând produsul celor două numere, vom obține un număr $x = 3^m \cdot 5^n$, unde m și n sunt ambele pare, ca atare, se va obține un pătrat perfect.	2p

Problema 4. Pe semidreapta OX sunt situate punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2026}$, în această ordine. Lungimile segmentelor $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2025}A_{2026}$ sunt exprimate, în *centimetri*, respectiv prin numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2026}$. Suma oricăror patru termeni consecutivi din secvența $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2026}$ este egală cu 1025. Dacă se notează $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d$, atunci a, b, c, d sunt numere prime, iar $6a + 3b + 10c = 78$.

- a) Determinați numărul d .
 b) Determinați lungimea segmentului OA_{2026} .

Soluție

a) $2(3a + 5c) + 3b = 78, 78:2 \Rightarrow b:2, b = \text{prim} \Rightarrow b = 2$	3p
$3(2a + b) + 10c = 78, 78:3 \Rightarrow c:3, c = \text{prim} \Rightarrow c = 3$	3p
$a = 7$	2p
$a_4 = 1025 - (7 + 2 + 3) = 1013 \Rightarrow d = 1013$	2p
b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow a_1 = a_5$	2p
Analog, $7 = a_1 = a_5 = \dots = a_{2025};$ $2 = a_2 = a_6 = a_{10} = \dots = a_{2026};$ $3 = a_3 = a_7 = a_{11} = \dots = a_{2023};$ $1013 = a_4 = a_8 = \dots = a_{2024}$	4p
Lungimea $OA_{2026} = (7 + 2 + 3 + 1013) \cdot 506 + 7 + 2 =$ $OA_{2026} = 1025 \cdot 506 + 9 = 518\,659$ (cm)	4p

Orice soluție corectă, diferită de cele din barem se punctează corespunzător.

