



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a IX-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$x^2 + 9\{x\}^2 + 4[x + 1] \cdot \{x + 2026\} = (\{x\} + 2)^2,$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$  iar  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului  $a$ .

### Subiectul 2 (21 puncte)

Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

### Subiectul 3 (21 puncte)

Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $M \in (BC)$ ,  $N \in (AC)$ ,  $P \in (AB)$  astfel încât  $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$ . Fie  $G_1, G_2, G_3$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $APN, BMP$  respectiv  $CNM$ . Să se arate că triunghiurile  $MNP$  și  $G_1G_2G_3$  au același centru de greutate.

### Subiectul 4 (21 puncte)

Determinați șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 1$  și  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k a_{k+1} + 1} = \frac{a_n + 1}{8}$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 21 puncte.

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

**Etapă locală 7.02.2026**

**Județul Buzău**

**CLASA a X-a**

### **Subiectul 1 (21 puncte)**

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$x + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} = 7$$

### **Subiectul 2 (21 puncte)**

Fie numerele reale pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_{1013}$  cu  $[x_1] = [x_2] = \dots = [x_{1013}] = 2$ . Arătați că:

$$\log_{x_1}(5x_2 - 6) + \log_{x_2}(5x_3 - 6) + \dots + \log_{x_{1012}}(5x_{1013} - 6) + \log_{x_{1013}}(5x_1 - 6) \geq 2026$$

### **Subiectul 3 (21 puncte)**

Fie  $z$  un număr complex, nereal astfel încât  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 2$ . Să se arate că

$$\left|z^{2026} + \frac{1}{z^{2026}}\right| \geq \left|z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}\right|.$$

### **Subiectul 4 (21 puncte)**

Determinați funcțiile  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât să fie îndeplinite condițiile:

- a)  $f(x) \leq \lg x, \forall x \in (0, \infty)$
- b)  $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, \infty)$

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 21 puncte.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a XI-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se rezolve ecuația  $\det(A(x) - I_3) = 1$ ;
- b) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $(A(1))^2 + (A(2))^2 + (A(3))^2 + \dots + (A(11))^2 = A(2n \cdot (n + 1))$ .

### Subiectul 2 (21 puncte)

Fie  $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ ,  $f(X) = (X - I_2)^2$  și  $M = \{X \in M_2(\mathbb{C}) | f(X) = 0_2\}$

- a) Arătați că mulțimea  $M$  este infinită.
- b) Dacă  $A \in M$  atunci  $\text{Tr}(A^n) = 2$  și  $\det(A^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Subiectul 3 (21 puncte)

Fie șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dat prin  $x_1 \in \mathbb{R}$  și  $4^{x_{n+1}} = 2^{x_n} + 2$ .

- a) Arătați că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este șir convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$

### Subiectul 4 (21 puncte)

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n})$ .

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a XII-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Fie  $(G, \cdot)$  un grup multiplicativ cu elementul neutru  $e \in G$  și  $x, y \in G$  astfel încât

$$x^2 = y^2 = (xy)^2. \text{ Arătați că } x^4 = y^4 = e.$$

### Subiectul 2 (21 puncte)

Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_1^e x \ln^n x dx$ .

- a) Să se arate că șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  ;
- b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n$  ;

### Subiectul 3 (21 puncte)

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

- a) Arătați că  $f$  admite primitive pe intervalul  $(0, \infty)$  și determinați o primitivă pe acest interval.
- b) Calculați  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

### Subiectul 4 (21 puncte)

Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$  este un izomorfism între grupurile  $(\mathbb{R}, +)$  și  $(G, *)$ .

- a) Determinați mulțimea  $G$ .
- b) Determinați legea de compoziție  $**$ .

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.