

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a IX-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$x^2 + 9\{x\}^2 + 4[x + 1] \cdot \{x + 2026\} = (\{x\} + 2)^2,$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$  iar  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului  $a$ .

### Soluție și Barem

Ecuația se mai scrie:

$$([x] + \{x\})^2 + 9\{x\}^2 + 4([x] + 1) \cdot \{x\} = \{x\}^2 + 4\{x\} + 4 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$$

$$[x]^2 + 2[x] \cdot \{x\} + \{x\}^2 + 9\{x\}^2 + 4[x] \cdot \{x\} + 4\{x\} = \{x\}^2 + 4\{x\} + 4$$

$$[x]^2 + 6[x] \cdot \{x\} + 9\{x\}^2 = 4 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$$

$$([x] + 3\{x\})^2 = 4 \Leftrightarrow [x] + 3\{x\} = 2 \text{ sau } [x] + 3\{x\} = -2 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$$

**1. Dacă  $[x] + 3\{x\} = 2$**

$$[x] + 3\{x\} = 2 \Leftrightarrow x + 2\{x\} = 2 \Leftrightarrow x = 2(1 - \{x\}) > 0$$

Din  $[x] + 3\{x\} = 2$  rezultă  $[x] \leq 2$ . Deci  $[x] \in \{0, 1, 2\} \dots \dots \dots 3 \text{ p}$

Dacă  $[x] = 0$  atunci  $\{x\} = \frac{2}{3}$  și  $x = \frac{2}{3}$ , dacă  $[x] = 1$ , atunci  $\{x\} = \frac{1}{3}$  și  $x = \frac{4}{3}$ , dacă  $[x] = 2$

atunci  $\{x\} = 0$  și  $x = 2 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$

**2. Dacă  $[x] + 3\{x\} = -2$**

$$0 \leq \{x\} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3\{x\} < 3 \Leftrightarrow -3 < -3\{x\} \leq 0 \Leftrightarrow -5 < -2 - 3\{x\} \leq -2$$

Rezultă  $[x] \in \{-4, -3, -2\} \dots \dots \dots 3 \text{ p}$

Dacă  $[x] = -4$  atunci  $\{x\} = \frac{2}{3}$  și  $x = -\frac{10}{3}$ , dacă  $[x] = -3$

atunci  $\{x\} = \frac{1}{3}$  și  $x = -\frac{8}{3}$ , dacă  $[x] = -2$  atunci  $\{x\} = 0$  și  $x = -2$ .

În final  $x \in \left\{-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, -2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right\} \dots \dots \dots 3 \text{ p}$

## **Subiectul 2 (21 puncte)**

Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} > \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

### **Soluție și Barem**

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(c+a)} + \frac{c^4}{c(a+b)} = \frac{a^4}{ab+ac} + \frac{b^4}{bc+ba} + \frac{c^4}{ca+cb} \geq \dots\dots\dots 3 \text{ p} \geq$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

În orice triunghi  $ABC$  sunt adevărate inegalitățile:  $|b-c| < a, |c-a| < b, |a-b| < c \dots\dots 3 \text{ p}$

care prin ridicare la pătrat conduc la:  $b^2 - 2bc + c^2 < a^2 \Leftrightarrow 2bc > b^2 + c^2 - a^2$  și analoagele.

$$2ca > c^2 + a^2 - b^2 \text{ și } 2ab > a^2 + b^2 - c^2 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Prin adunarea membru cu membru a celor trei inegalități se obține inegalitatea:

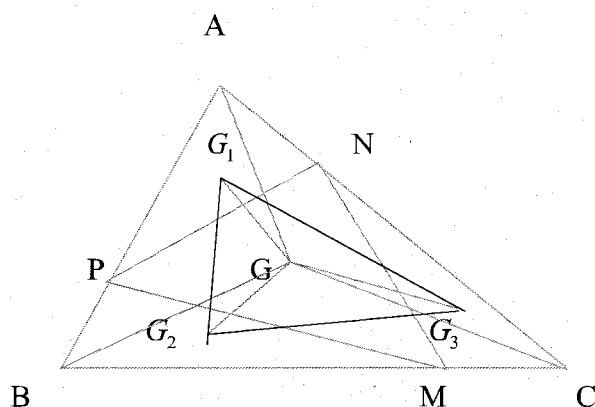
$$2ab + 2bc + 2ca > a^2 + b^2 + c^2 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Prin împărțire cu 4 se obține  $\frac{ab+bc+ca}{2} > \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$  și apoi concluzia.  $\dots\dots\dots 3 \text{ p}$

### **Subiectul 3 (21 puncte)**

Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $M \in (BC)$ ,  $N \in (AC)$ ,  $P \in (AB)$  astfel încât  $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$ .  
Fie  $G_1, G_2, G_3$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $APN$ ,  $BMP$  respectiv  $CNM$ . Să se arate că  
triunghiurile  $MNP$  și  $G_1G_2G_3$  au același centru de greutate.

### **Soluție și Barem**



$G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .....3 p

Două triunghiuri  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  au același centru de greutate dacă și numai dacă

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$\triangle ABC$  și  $\triangle MNP$  au același centru de greutate  $G$ . (Teorema lui Pappus sau demonstrație)...3 p

Rămâne să demonstre că  $G$  este centrul de greutate al  $\triangle G_1G_2G_3$ .....3 p

$$\vec{GG_1} + \vec{GG_2} + \vec{GG_3} = \frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{GP} + \vec{GN}) + \frac{1}{3}(\vec{GB} + \vec{GP} + \vec{GM}) + \frac{1}{3}(\vec{GC} + \vec{GM} + \vec{GN}) = 3 \text{ p}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + \frac{2}{3}(\vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GP}) = \vec{0} \dots\dots\dots 6 \text{ p}$$

### **Subiectul 4 (21 puncte)**

Determinați șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 1$  și  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k a_{k+1} + 1} = \frac{a_n + 1}{8}$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

### **Soluție și Barem**

Egalitatea din enunț fiind adevărată pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , pentru  $n = 1$  se obține:

$$\frac{1^2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_1 + 1}{8}. \text{ Cum } a_1 = 1, \text{ rezultă } a_2 = 3. \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Pentru  $n = 2$ , egalitatea devine  $\frac{1^2}{a_1 a_2 + 1} + \frac{2^2}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_2 + 1}{8}$ . Prin înlocuirea lui  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 3$  se obține  $a_3 = 5. \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

Arătăm prin inducție matematică faptul că  $a_n = 2n - 1$ , pentru orice  $n \geq 1. \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

Considerăm propoziția  $P_n: a_n = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Propoziția  $P_1: a_1 = 1$  este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția  $P_k: a_k = 2k - 1$  pentru orice  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}. \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

Egalitatea din enunț o putem scrie:  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k a_{k+1} + 1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{a_k a_{k+1} + 1} + \frac{n^2}{a_n a_{n+1}}$ , de unde rezultă

$$\frac{a_n + 1}{8} = \frac{a_{n-1} + 1}{8} + \frac{n^2}{a_n a_{n+1} + 1}, \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\text{adică } \frac{a_n + 1}{8} - \frac{a_{n-1} + 1}{8} = \frac{n^2}{a_n a_{n+1} + 1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{n^2}{(2n-1) \cdot a_{n+1} + 1} \Rightarrow a_{n+1} = 2n + 1, \text{ deci propoziția}$$

$P_n: a_n = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  este adevărată.  $\dots\dots\dots 6 \text{ p}$



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a X-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$x + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} = 7$$

### Soluție și Barem

Condițiile de existență ale radicalilor și fracției impun

$x \in (2, \infty)$ .....3 p

Observare soluție  $x = 3$  .....3 p

Conform inegalității mediilor avem  $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{(x-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x-2+1+1+1}{4} = \frac{x+1}{4}$  ...6 p

$$x + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq x + \frac{4}{\frac{x+1}{4}} = x + \frac{16}{x+1} = (x+1) + \frac{16}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{16}{x+1}} - 1 = 7$$

.....6 p

Egalitatea poate avea loc dacă  $x-2 = 1$  și  $x+1 = \frac{16}{x+1} \Leftrightarrow x = 3$  soluție unică.....3 p

## Subiectul 2 (21 puncte)

Fie numerele reale pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_{1013}$  cu  $[x_1] = [x_2] = \dots = [x_{1013}] = 2$ . Arătați că:

$$\log_{x_1}(5x_2 - 6) + \log_{x_2}(5x_3 - 6) + \dots + \log_{x_{1012}}(5x_{1013} - 6) + \log_{x_{1013}}(5x_1 - 6) \geq 2026$$

### Soluție și Barem

Pentru  $k \in \{1, 2, \dots, 1013\}$  avem  $2 \leq x_k < 3 \Leftrightarrow x_k - 2 \geq 0$  și  $x_k - 3 < 0 \Rightarrow$

$$(x_k - 2) \cdot (x_k - 3) \leq 0 \dots\dots\dots 6 \text{ p}$$

$$\Leftrightarrow x_k^2 - 5x_k + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 5x_k - 6 \geq x_k^2 \dots\dots\dots 6 \text{ p}$$

$$5x_2 - 6 \geq x_2^2 \Leftrightarrow \log_{x_1}(5x_2 - 6) \geq 2 \log_{x_1} x_2, 5x_3 - 6 \geq x_3^2 \Leftrightarrow \log_{x_2}(5x_3 - 6) \geq 2 \log_{x_2} x_3$$

$$5x_{1013} - 6 \geq x_{1013}^2 \Leftrightarrow \log_{x_{1012}}(5x_{1013} - 6) \geq 2 \log_{x_{1012}} x_{1013},$$

$$5x_1 - 6 \geq x_1^2 \Leftrightarrow \log_{x_{1013}}(5x_1 - 6) \geq 2 \log_{x_{1013}} x_1 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Prin adunarea acestor inegalități avem

$$\log_{x_1}(5x_2 - 6) + \log_{x_2}(5x_3 - 6) + \dots + \log_{x_{1012}}(5x_{1013} - 6) + \log_{x_{1013}}(5x_1 - 6) \geq$$

$$\geq 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_{1012}} x_{1013} + \log_{x_{1013}} x_1) \geq$$

$$\geq 2 \cdot 1013 \cdot \sqrt[1013]{\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdots \log_{x_{1012}} x_{1013} \cdot \log_{x_{1013}} x_1} = 2026 \dots\dots\dots 6 \text{ p}$$

### **Subiectul 3 (21 puncte)**

Fie  $z$  un număr complex, nereal astfel încât  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 2$ . Să se arate că

$$\left|z^{2026} + \frac{1}{z^{2026}}\right| \geq \left|z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}\right|.$$

### **Soluție și Barem**

Arătăm că, în condițiile din enunț,  $\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| \geq \left|z + \frac{1}{z}\right|$

Avem,  $\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| = \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\right| \geq \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^2\right| - |2| = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 - 2 \dots\dots\dots 6 \text{ p}$

Am folosit inegalitatea  $|a + b| \leq |a| + |b|$  în forma  $|a - b| + |b| \geq |a| \Leftrightarrow \Leftrightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$ .

Rămâne de arătat că  $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 - 2 \geq \left|z + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 - \left|z + \frac{1}{z}\right| - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\left|z + \frac{1}{z}\right| - 2\right) \cdot \left(\left|z + \frac{1}{z}\right| + 1\right) \geq 0$  care este adevărată.....3 p

Mai departe procedăm prin inducție. Presupunem că pentru  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n$  fixat avem

$\left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| \geq \left|z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right|$  și arătăm că  $\left|z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right| \geq \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| \dots\dots\dots 3 \text{ p}$

$$\begin{aligned} \left|z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right| &= \left|\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)\right| \geq \left|\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\right| - \left|z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right| \geq \\ &\geq \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| - \left|z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right| \geq 2 \cdot \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| - \left|z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right| \geq \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| + \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| - \\ &- \left|z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right| \geq \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| \dots\dots\dots 6 \text{ p} \end{aligned}$$

Pentru  $n = 2025$  se obține concluzia.....3 p

### **Subiectul 4 (21 puncte)**

Determinați funcțiile  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât să fie îndeplinite condițiile:

- a)  $f(x) \leq \lg x, \forall x \in (0, \infty)$
- b)  $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, \infty)$

### **Soluție și Barem**

Din condiția a) pentru  $x = 1$  obținem  $f(1) \leq \lg 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) \leq 0$ .....3 p

Din condiția b) pentru  $x = y = 1$  obținem  $f(1) \leq f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) \geq 0$ . Deci  $f(1) = 0$ .

.....3 p

Din condiția b) pentru  $y = \frac{1}{x} \in (0, \infty)$  obținem  $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \leq f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq -f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in (0, \infty)$ .....3 p

Din condiția a) punând în loc de  $x$  pe  $\frac{1}{x} \in (0, \infty)$  rezultă  $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lg \frac{1}{x} = -\lg x \Rightarrow \lg x \leq -f\left(\frac{1}{x}\right)$

.....3 p

Deci  $\forall x \in (0, \infty)$  avem  $\lg x \geq f(x) \geq -f\left(\frac{1}{x}\right) \geq \lg x$ .....6 p

Rezultă  $f(x) = \lg x, \forall x \in (0, \infty)$ .....3 p



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a XI-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se rezolve ecuația  $\det(A(x) - I_3) = 1$ ;  
b) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  
 $(A(1))^2 + (A(2))^2 + (A(3))^2 + \dots + (A(11))^2 = A(2n \cdot (n + 1))$ .

### Soluție și Barem

a)  $\det(A(x) - I_3) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 \\ x & 0 & x-1 \end{vmatrix} = -(x-1)^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$  ..... 9 p

b)  $A^2(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 & 2x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$  ..... 3 p

$(A(1))^2 + (A(2))^2 + (A(3))^2 + \dots + (A(11))^2 = \begin{pmatrix} 2A & 0 & 2A \\ 0 & 0 & 0 \\ 2A & 0 & 2A \end{pmatrix}$ , unde

$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 11^2 = \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6}$  ..... 6 p

Din egalitatea  $(A(1))^2 + (A(2))^2 + (A(3))^2 + \dots + (A(11))^2 = A(2n \cdot (n + 1))$  dată în cerință și din faptul că matricele sunt funcții bijective rezultă că  $2 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} = 2n \cdot (n + 1) \Rightarrow n = 22$ . ..... 3 p

## **Subiectul 2 (21 puncte)**

Fie  $f: M_2(C) \rightarrow M_2(C)$ ,  $f(X) = (X - I_2)^2$  și  $M = \{X \in M_2(C) | f(X) = 0_2\}$

- Arătați că mulțimea  $M$  este infinită.
- Dacă  $A \in M$  atunci  $Tr(A^n) = 2$  și  $\det(A^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

## **Soluție și Barem**

- Mulțimea  $\left\{ \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix} | z \in C \right\}$  este inclusă în mulțimea  $M$  deci mulțimea  $M$  este infinită .....9 p

- Dacă  $A \in M$  atunci  $f(A) = 0_2 \Leftrightarrow (A - I_2)^2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I_2 = 0_2$  și din ecuația Hamilton-Cayley a matricei  $A$  rezultă  $Tr(A) = 2$  și  $\det(A) = 1$  .....3 p

Dacă  $A \in M$  atunci  $f(A) = 0_2 \Leftrightarrow (A - I_2)^2 = 0_2$

$$f(A^n) = (A^n - I_2)^2 = ((A - I_2)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I_2))^2 = (A - I_2)^2 (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I_2)^2 = f(A)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I_2)^2 = 0_2(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I_2)^2 = 0_2 \dots \dots \dots 6 \text{ puncte}$$

Rezultă  $A^n \in M \Rightarrow Tr(A^n) = 2$  și  $\det(A^n) = 1$  .....3 p

### Subiectul 3 (21 puncte)

Fie șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dat prin  $x_1 \in \mathbb{R}$  și  $4^{x_{n+1}} = 2^{x_n} + 2$ .

- a) Arătați că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este șir convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  
b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$

### Soluție și Barem

- a) Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  notăm  $y_n = 2^{x_n} \in (0, \infty)$ ,  $y_1 = 2^{x_1} \in (0, \infty)$  și atunci avem

$$y_{n+1}^2 = y_n + 2 \Leftrightarrow y_{n+1} = \sqrt{y_n + 2}$$

Dacă  $x_1 = 1$  atunci  $x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ , șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este constant, convergent și are limita 1.....3 p

Dacă  $x_1 > 1 \Leftrightarrow y_1 > 2$  și prin inducție rezultă  $y_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{y_n + 2} - y_n = \frac{y_n + 2 - y_n^2}{\sqrt{y_n + 2} + y_n} = -\frac{(y_n - 2)(y_n + 1)}{\sqrt{y_n + 2} + y_n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

.....3 p

Deci șirul  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este descrescător, mărginit inferior de 0, este convergent și trecând la limită în relația de recurență se obține  $l^2 = l + 2$  și cum  $l \geq 0$  avem

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{x_n} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \Rightarrow$  șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și are limita 1 .....3 p

Dacă  $x_1 < 1 \Leftrightarrow 0 < y_1 < 2$  și prin inducție rezultă  $y_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{y_n + 2} - y_n = \frac{y_n + 2 - y_n^2}{\sqrt{y_n + 2} + y_n} = -\frac{(y_n - 2)(y_n + 1)}{\sqrt{y_n + 2} + y_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci șirul  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este crescător, mărginit superior de 2, este convergent și trecând la limită în relația de recurență se obține  $l^2 = l + 2$  și cum  $l \geq 0$  avem

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{x_n} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \Rightarrow$  șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și are limita 1.

Deci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ..... 3p

- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n - 1)^{\frac{1}{x_n - 1} \cdot (x_n - 1) \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)} = e^0 = 1$ ..... 3p

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\ln \frac{y_n}{2}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( \frac{y_n}{2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{y_n}{2} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{y_n - 2}{2} \right)^{\frac{2}{y_n - 2} \cdot \frac{y_n - 2}{2} \cdot n} = \frac{1}{2 \ln 2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n(y_n - 2) = 0 \end{aligned}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(y_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{y_n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{y_{n+1}-2} - \frac{1}{y_n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(y_{n+1}-2)(y_n-2)}{y_n - \sqrt{y_n+2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(y_{n+1}-2)(y_n-2)(y_n+\sqrt{y_n+2})}{y_n^2 - y_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(y_{n+1}-2)(y_n-2)(y_n+\sqrt{y_n+2})}{y_n^2 - y_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(y_{n+1}-2)(y_n+\sqrt{y_n+2})}{y_n+1} = 0$$

.....3p

#### Subiectul 4 (21 puncte)

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n})$ .

#### Soluție și Barem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n} - n\pi + n\pi) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos \pi(\sqrt{n^2 + n} - n) \cos n\pi - \sin \pi(\sqrt{n^2 + n} - n) \sin n\pi] \dots\dots\dots 6p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(-1)^n \cos \pi(\sqrt{n^2 + n} - n) - 0 \cdot \sin \pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos \pi \cdot \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos \pi \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \dots\dots\dots 6p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos \pi \cdot \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

Șirul  $(-1)^n$  este un șir mărginit iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = 0 \dots\dots\dots 6p$$



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 7.02.2026

Județul Buzău

CLASA a XII-a

### Subiectul 1 (21 puncte)

Fie  $(G, \cdot)$  un grup multiplicativ cu elementul neutru  $e \in G$  și  $x, y \in G$  astfel încât

$$x^2 = y^2 = (xy)^2. \text{ Arătați că } x^4 = y^4 = e.$$

### Soluție și Barem

$$x^2 = (xy)^2 \dots (1) \Rightarrow x^2 = xyxy \Rightarrow x = yxy \dots (2) \dots \dots \dots 3p$$

$$y^2 = (xy)^2 \dots (3) \Rightarrow y^2 = xyxy \Rightarrow y = xyx \dots (4) \dots \dots \dots 3p$$

$$\text{Din (2) și (4) rezultă } xy = (yxy)(xyx) = y(xy)^2x \stackrel{(3)}{=} yy^2x = y^3x \Rightarrow xy = y^3x \dots (5) \dots 6p$$

$$\text{Din (5) și (2) rezultă } xy = y^3yxy \Rightarrow xy = y^4xy \Rightarrow y^4 = e \dots \dots \dots 6p$$

$$\text{Analog } x^4 = e \text{ de unde } x^4 = y^4 = e \dots \dots \dots 3p$$

### Subiectul 2 (21 puncte)

Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_1^e x \ln^n x dx$ .

a) Să se arate că șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  ;

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n$  ;

### Soluție și Barem

a)  $1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq x \ln^n x \leq e \Rightarrow 0 \leq I_n \leq e(e-1)$ , deci șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow \ln x \in [0, 1] \Rightarrow \ln^{n+1} x \leq \ln^n x \Rightarrow x \ln^{n+1} x \leq x \ln^n x \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Deci șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este descrescător și mărginit  $\Rightarrow$  șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este convergent.....3p

$$I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^{n+1} x dx = \frac{x^2}{2} \ln^{n+1} x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (n+1) \cdot \ln^n x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \cdot I_n \Rightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \dots\dots\dots 6p$$

$$e^2 = 2I_{n+1} + (n+1)I_n \geq 2I_{n+1} + (n+1)I_{n+1} = (n+3)I_{n+1} \Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3} \Rightarrow$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \text{ și prin trecere la limită în această inegalitate rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \dots\dots\dots 3p$$

b) Avem  $0 \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

Din  $I_{n+1} \leq I_n$  și  $e^2 = 2I_{n+1} + (n+1)I_n$  rezultă

$$e^2 = 2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq 2I_n + (n+1)I_n = (n+3)I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$$

Deci avem inegalitatea  $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}, \forall n \in N^* \dots\dots\dots 6p$

Prin înmulțire cu  $n \in N^*$  se obține  $\frac{ne^2}{n+3} \leq nI_n \leq \frac{ne^2}{n+2}$  și trecând la limită  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = e^2$   
 $\dots\dots\dots 3p$

### **Subiectul 3 (21 puncte)**

Se consideră funcția  $f: R \rightarrow R, f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

- Arătați că  $f$  admite primitive pe intervalul  $(0, \infty)$  și determinați o primitivă pe acest interval.
- Calculați  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

### **Soluție și Barem**

- a)  $f$  este continuă pe  $(0, \infty)$  deci  $f$  are primitive pe  $(0, \infty)$ .....3p

Pentru  $x \in (0, \infty)$  avem  $\int f(x) dx = \int x' \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} +$

$$+ \int x \cdot \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} dx = \dots\dots\dots 3p$$

$$= x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \int x \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + C \dots\dots\dots 3p$$

b) Pentru  $x \in (-\infty, 0)$  avem

$$\int f(x) dx = \int x' \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \int x \cdot \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} +$$

$$+ \int x \cdot \left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) + C.$$

.....3p

Deci dacă  $F: R \rightarrow R$  este o primitivă a lui  $f: R \rightarrow R$  atunci  $F$  este de forma

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + c_1, & x \in (0, \infty) \\ c_2, & x = 0 \\ x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) + c_3, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Din construcție și din continuitatea și derivabilitatea lui  $F$  în 0 și  $F'(0) = 0$  rezultă

$c_1 = c_2 = c_3 = c \in R$  și că o primitivă pe  $R$  a lui  $f$  este

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + c, & x \in (0, \infty) \\ c, & x = 0 \\ x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) + c, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

.....6p

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{\pi}{2} - \ln 2 = \pi - 2 \ln 2 \dots\dots\dots 3p$$

### Soluție alternativă la punctul b)

Dacă se construiește, într-un mod similar, primitiva pe intervalul  $[0, \infty)$  și se obține

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + c, & x \in (0, \infty) \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

.....9p

Funcția  $f$  este continuă deci are primitive pe  $R$  și este integrabilă pe  $[-1, 1]$  și din paritate

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 2(F(1) - F(0)) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right) = \pi - 2\ln 2 \dots\dots\dots 3p$$

#### **Subiectul 4 (21 puncte)**

Funcția  $f: R \rightarrow G, f(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$  este un izomorfism între grupurile  $(R, +)$  și  $(G, *)$ .

- Determinați mulțimea  $G$ .
- Determinați legea de compoziție  $*$ .

#### **Soluție și Barem**

a) Avem că  $f'(x) = \left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)' = \frac{-2e^{2x}(1+e^{2x}) - 2e^{2x}(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0, \forall x \in R$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

Deci funcția  $f$  este continuă, derivabilă, strict descrescătoare și bijectivă fiind izomorfism.

Rezultă că  $G = f(R) = (-1, 1) \dots\dots\dots 6p$

- b) Fie  $x, y \in G = (-1, 1)$ . Deoarece  $f$  este bijectivă rezultă că există  $u, v \in R$  astfel încât  $x = f(u), y = f(v) \dots\dots\dots 3p$

$$x = f(u) = \frac{1-e^{2u}}{1+e^{2u}} \Leftrightarrow x + xe^{2u} = 1 - e^{2u} \Leftrightarrow e^{2u} = \frac{1-x}{1+x} \text{ și analog } e^{2v} = \frac{1-y}{1+y} \dots\dots 3p$$

$$\text{Atunci } x * y = f(u) * f(v) = f(u+v) = \frac{1-e^{2(u+v)}}{1+e^{2(u+v)}} = \frac{1-e^{2u} \cdot e^{2v}}{1+e^{2u} \cdot e^{2v}} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y}}{1+\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y}} =$$

$$= \frac{(1+x)(1+y) - (1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y) + (1-x)(1-y)} = \frac{1+x+y+xy - 1-x-y+xy}{1+x+y+xy + 1-x-y+xy} = \frac{2x+2y}{2+2xy} = \frac{x+y}{1+xy} \dots\dots\dots 6p$$