

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 6 februarie 2026

Clasa a IX-a

1. Determinaţi toate numerele de patru cifre \overline{abcd} care au proprietatea că

$$(\overline{ab} + \overline{cd})^2 = \overline{abcd}.$$

(Convenim ca pentru $c = 0$, $\overline{cd} = d$.)

Romeo Ilie

2. Rezolvaţi ecuaţiile:

(a) $2025 \cdot x^2 - 90 \cdot [x] + 1 = 0$;

(b) $\frac{x}{2} - \frac{1013}{[x]} = \frac{[x]}{2} - \frac{1013}{x}.$

Prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului real a .

Ioana Maşca

3. Demonstraţi că valoarea minimă a expresiei $\max\left(a + \frac{1}{4b}, b + \frac{1}{4a}\right)$ este egală cu valoarea maximă a expresiei $\min\left(\frac{1}{a + \frac{1}{4b}}, \frac{1}{b + \frac{1}{4a}}\right)$, unde $a, b > 0$.

Romeo Ilie

4. Fie $ABCD$ un patrulater şi O intersecţia diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele E şi F astfel încât D şi C sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AOE şi BFO . Arătaţi că $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$.

Gazeta Matematică

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect valorează 9 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 6 februarie 2026

Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
- (a) Demonstrați că există $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$ astfel încât $z_i = \lambda \cdot |z_i|$, $i \in \{1, 2\}$.
- (b) Demonstrați că $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| \geq \frac{4}{|z_1| + |z_2|}$.

2. Fie $a, b, c \in (0, 1)$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\log_a^2 b}{2} + \frac{\log_b^2 c}{3} + \frac{\log_c^2 a}{4} > 1.$$

Florin Cârstea

3. Determinați cel mai mic număr natural k cu proprietatea că pentru orice funcție bijectivă $f : \{1, 2, \dots, 2026\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2026\}$ există $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq k$.

Gazeta Matematică, enunț modificat

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (a) Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\sin^2(x)} + \sqrt[n]{\cos^2(x)} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Folosind, eventual, punctul (a), demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\sin^{n+1}(x)} + \sqrt[n]{\cos^{n+1}(x)} \leq \sqrt[2n]{2^{n-1}}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect valorează 9 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Clasa a XI-a

1. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB + BA = O_n$.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(R)$ ce satisfac relaţia $(AB - BA)^{2026} = I_2$. Demonstraţi că

$$(AB - BA)^2 = I_2.$$

3. Se consideră şirul definit prin $x_1 = \sqrt{2}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$.

(a) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt{n}}$.

(b) Arătaţi că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

(c) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ conţine un subşir $(s_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+2}} + \dots + \frac{1}{s_{2n}} \right) = \ln 2.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect valorează 9 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 6 februarie 2026

Clasa a XII-a

1. Fie M o mulţime cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (a) Câte legi de compoziţie se pot defini pe M ?
- (b) Câte dintre acestea sunt comutative?
- (c) Câte au element neutru?

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

2. (a) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ este bijectivă.
- (b) Pe \mathbb{R} se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Arătaţi că (\mathbb{R}, \circ) este grup abelian, izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii

3. Se consideră şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \frac{\pi}{4}$ şi $I_{n+1} = \int_0^{I_n} \sin^{2026}(x) dx$, pentru orice $n \geq 1$.

- (a) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton şi mărginit.
- (b) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Romeo Ilie

4. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi periodică, de perioadă $T > 0$, arătaţi că:

(a)
$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect valorează 9 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 3 ore.