

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A IX-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- Se acordă 16 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. (21p) a) Arătați că $x^4 - 2x^3 - 8x + 16 \geq 0$, oricare ar fi numărul real x . Când are loc egalitatea ?

b) Determinați numere reale $x_1, x_2, \dots, x_{2026}$ care verifică simultan condițiile:

$$\text{i) } 8(x_1 + x_2 + \dots + x_{2026}) = 32415; \text{ ii) } x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2026}^4 = 2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2026}^3) - 1.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\text{a) } x^3(x-2) - 8(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3-8) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x^2+2x+4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2[(x+1)^2+3] \geq 0 \dots\dots\dots 7p$$

$$\text{Egalitatea are loc pentru } x = 2 \dots\dots\dots 2p$$

b) Scădem relația i) din ii) și obținem

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2026}^4 - 8(x_1 + x_2 + \dots + x_{2026}) = 2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2026}^3) - 32416 \dots\dots\dots 5p$$

$$(x_1^4 - 2x_1^3 - 8x_1 + 16) + (x_2^4 - 2x_2^3 - 8x_2 + 16) + \dots + (x_{2026}^4 - 2x_{2026}^3 - 8x_{2026} + 16) = 0 \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Din a) obținem } x_1 = x_2 = \dots = x_{2026} = 2 \dots\dots\dots 2p$$

2. (21p) În triunghiul ABC ascuțitunghic, H este ortocentrul și A_1, B_1, C_1 simetricele lui H față de mijloacele laturilor $[BC], [AC]$, respectiv $[AB]$. Arătați că, dacă triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC au același centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Considerăm A' mijlocul laturii $[BC]$.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, 2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA_1} \Rightarrow \dots\dots\dots 7p$$

$$\overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} \dots\dots\dots 6p$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = 3\overrightarrow{OG} \dots\dots\dots 3p$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow 3\overrightarrow{OG} = -3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O = G \Rightarrow \text{triunghiul } ABC \text{ este echilateral} \dots\dots\dots 2p$$

3. (21p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{6x+7}{10} \right] - \left\{ \frac{3x+11}{5} \right\} = \frac{x+1}{5}$.

(S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a lui x și cu $\{x\}$ partea fracționară a lui x , $x \in \mathbb{R}$)

Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

$$\left\{ \frac{3x+11}{5} \right\} = \left\{ \frac{3x+1}{5} + 2 \right\} = \left\{ \frac{3x+1}{5} \right\} = \left\{ \frac{6x+2}{10} \right\} = \frac{6x+2}{10} - \left[\frac{6x+2}{10} \right] \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Ecuația devine } \left[\frac{6x+2}{10} \right] + \left[\frac{6x+2}{10} + \frac{1}{2} \right] = \frac{4x+2}{5} \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Utilizând identitatea Hermite obținem } \left[2 \cdot \frac{6x+2}{10} \right] = \frac{4x+2}{5} \Leftrightarrow \left[\frac{6x+2}{5} \right] = \frac{4x+2}{5} \dots\dots\dots 6p$$

$$\text{Soluțiile ecuației sunt } \frac{3}{4} \text{ și } 2 \dots\dots\dots 5p$$

4. (21p) Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstrați că:

$$\frac{3a+16}{9(b+c)} + \frac{3b+16}{9(a+c)} + \frac{3c+16}{9(a+b)} \geq \frac{1}{2} + \frac{8}{a+b+c}.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc} \dots\dots\dots 5p$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \dots\dots\dots 5p$$

$$\frac{3a}{9(b+c)} + \frac{3b}{9(a+c)} + \frac{3c}{9(a+b)} \geq \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} (1) \dots\dots\dots 4p$$

$$\frac{16}{9(b+c)} + \frac{16}{9(a+c)} + \frac{16}{9(a+b)} \geq \frac{(4+4+4)^2}{9 \cdot 2 \cdot (a+b+c)} = \frac{12^2}{18(a+b+c)} = \frac{8}{a+b+c} (2) \dots\dots\dots 5p$$

Din (1) și (2) obținem inegalitatea.....2p