

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A VIII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- Se acordă 16 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. (21p) Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 3 \right\}$ și $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3 \}$.

a) Scrie ca intervale cele două mulțimi.

b) Arată că numărul $a = \frac{\sqrt{3}+8}{2}$ aparține mulțimii B .

Gazeta Matematică

Soluție:

a) $A = [-2, 4]$ 7p

$B = [-1, 5]$ 7p

b) $-1 \leq \frac{\sqrt{3}+8}{2} \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{3}+8 \leq 10 \Leftrightarrow$ 4p

$\Leftrightarrow -10 \leq \sqrt{3} \leq 2 \Leftrightarrow -10 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{4} \text{ (A)} \dots\dots\dots 3p$

2. (21p) Dacă $(x+5)^3 - 9x - 45 = (x+a)(x+b)(x+c)$, pentru orice număr real x , atunci determină suma numerelor reale a, b și c .

Manual Matematică, clasa a VIII-a

Soluție:

$(x+5)^3 - 9x - 45 = (x+5)^3 - 9(x+5) =$ 6p

$= (x+5)[(x+5)^2 - 9] =$ 5p

$$= (x+5)(x+2)(x+8) = (x+a)(x+b)(x+c), \text{ pentru orice număr real } x. \dots\dots\dots 5p$$

Suma numerelor a, b și c este egală cu 15.5p

3. (21p) Determină $n \in \mathbb{N}$ știind că $\sqrt{2026} - \sqrt{2026-n} + \sqrt{2025} + \sqrt{2025-n} = 2\sqrt{n}$.

George-Florin Șerban, Brăila

Soluție:

$$n \leq 2026, n \leq 2025, 2026 - \sqrt{2026-n} \geq 0 \Rightarrow n \leq 2025 \dots\dots\dots 2p$$

I) $n = 2025$; obținem $45 + 45 = 90$, adevărat.5p

$$\text{II) } n < 2025; \text{ avem } \sqrt{2026} - \sqrt{2026-n} - \sqrt{n} = \sqrt{n} - \sqrt{2025} + \sqrt{2025-n} \dots\dots\dots 6p$$

Se observă că $\sqrt{n} - \sqrt{2025} + \sqrt{2025-n} < 0$, deoarece $\sqrt{n} < \sqrt{2025} + \sqrt{2025-n}$,

$$n < 2025 + \sqrt{2025-n}, \sqrt{2025-n} > 0. \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Obținem } \sqrt{2026} - \sqrt{2026-n} - \sqrt{n} < 0, \sqrt{2026} - \sqrt{2026-n} < \sqrt{n}, 2026 - \sqrt{2026-n} < n,$$

$2026 - n < \sqrt{2026-n}$. Notăm $x = 2026 - n \in \mathbb{N}^*$, $x < \sqrt{x}$, $x^2 < x$, $x(x-1) < 0$, rezultă $x < 1$, fals deoarece $x > 1$, $2026 - n > 1$, $n < 2025$4p

4. (21p) Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, cu $BC' \cap B'C = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$. Dacă punctele S și T sunt mijloacele segmentelor AO și $D'O'$, atunci demonstrează că $ST \parallel (A'BC')$.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

Notăm $AB = 4x$.

Dacă R este mijlocul segmentului $[A'O]$, atunci $[RS]$ este linie mijlocie în triunghiul $A'OA$

$$\Rightarrow RS \parallel AA' \text{ și } RS = \frac{AA'}{2} = 2x \text{ (1)} \dots\dots\dots 6p$$

Fie $AC \cap BD = \{O''\}$, N mijlocul segmentului $[DO'']$ și $NT \cap BO' = \{Q\}$

Avem $TO' = \frac{D'O'}{2} = \frac{NB}{3}$ și cum $TO' \parallel NB \Rightarrow \Delta QTO' \sim \Delta QNB \Rightarrow QT = 2x$

Obținem $QT \parallel DD' \parallel AA'$ și $QT = 2x$ (2).....10p

Din (1) și (2) $\Rightarrow RSTQ$ este paralelogram $\Rightarrow \begin{cases} ST \parallel RQ \\ RQ \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow ST \parallel (A'BC') \dots\dots\dots 5p$