

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A XII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- Se acordă 16 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. (21p) Pe mulțimea $G = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ considerăm legea de compoziție asociativă “*”, definită prin $x * y = 4xy + 2x + 2y + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Arătați că $x * y = (2x+1)(2y+1) - \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătați că legea “*” admite elementul neutru $e = -\frac{1}{4}$.

c) Calculați $\left(-\frac{2025}{2}\right) * \left(-\frac{2023}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} * \dots * \frac{2025}{2}$.

a) $(2x+1)(2y+1) - \frac{1}{2} = 4xy + 2x + 2y + 1 - \frac{1}{2} = 4xy + 2x + 2y + \frac{1}{2} = x * y \dots\dots\dots 5p$

b) Se observă că $x * y = y * x$ oricare ar fi $x, y \in G$ și $x * \left(-\frac{1}{4}\right) = x$, oricare ar fi $x \in G$.

elementul neutru.....6p

c) $x * \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \underbrace{\left(-\frac{2025}{2}\right) * \left(-\frac{2023}{2}\right) * \dots * \left(-\frac{3}{2}\right)}_a \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} * \dots * \frac{2025}{2}}_b = a * \left(-\frac{1}{2}\right) * b =$

$$(a * b) * \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Din asociativitatea și comutativitatea legii de compoziție avem:

$$a * \left(-\frac{1}{2}\right) * b = (a * b) * \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 10p$$

2. (21p) Arătați că $\int_0^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x^2+1}} \left(\cos x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} - 1$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{e^{\sin x} \cdot \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{e^{\sin x} \cdot x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \right] dx = \int_0^{\pi} \frac{e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot e^{\sin x}}{(x^2 + 1)} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' dx = \dots\dots\dots 10p$$

$$= \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x^2 + 1}} \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\sin \pi}}{\sqrt{\pi^2 + 1}} - \frac{e^{\sin 0}}{1} = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}} - 1 \dots\dots\dots 11p$$

3. (21p) Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x, y) = x \cdot I_3 + y \cdot A$,

unde $x \in \mathbb{R}^*$ și $y \in \mathbb{R}$. Notăm mulțimea $G = \{B(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $A^2 = O_3$.

b) Demonstrați că (G, \cdot) este grup abelian.

c) Arătați că $\det B(x, y)$ nu depinde de y .

Soluție:

a) Calcul direct.....5p

b) Demonstrăm că oricare ar fi $B(x, y)$ și $B(t, u) \in G$ avem $B(x, y) \cdot B(t, u) \in G$

$$B(x, y) \cdot B(t, u) = (x \cdot I_3 + y \cdot A)(t \cdot I_3 + u \cdot A) = x \cdot t \cdot I_3 + x \cdot u \cdot A + t \cdot y \cdot A + u \cdot y \cdot A^2 =$$

$$= x \cdot t \cdot I_3 + x \cdot u \cdot A + t \cdot y \cdot A = x \cdot t \cdot I_3 + (x \cdot u + t \cdot y) A = B(x \cdot t; x \cdot u + t \cdot y) \in G, x \cdot t \neq 0$$

Înmulțirea matricelor cu elemente numere reale este asociativă. $I_3 = B(1, 0) \in G$ este elementul neutru. Se observă că legea este comutativă. Demonstrăm că oricare ar fi $B(x, y) \in G$, există

$B(t, u) \in G$ astfel încât $B(x, y) \cdot B(t, u) = B(1, 0) \Rightarrow x \cdot t = 1$ și $x \cdot u + t \cdot y = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{x}$ și

$u = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow B^{-1}(x, y) = B\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^2}\right) \Rightarrow (G, \cdot)$ este grup abelian.....10p

$$c) \det B(x, y) = \begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ 4y & x+2y & 2y \\ -8y & -4y & x-4y \end{vmatrix} \begin{matrix} -C_2+C_1 \\ = \\ -C_3+C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & y & y \\ -x & x+2y & 2y \\ -x & -4y & x-4y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ -1 & x+2y & 2y \\ -1 & -4y & x-4y \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 0 & x+3y & 3y \\ 0 & -3y & x-3y \end{vmatrix} = x^3, \text{ care nu depinde de } y. \dots\dots\dots 6p$$

4. (21p) Arătați că $\frac{\pi}{2\sqrt{30}} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^4+1}} dx \leq \frac{3\pi}{2\sqrt{30}}.$

Soluție:

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^4+1}} dx, y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{1}{y^2} dy, x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{3}; x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x}{\sqrt{x^4+1}} dx = - \int_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\arctg \frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^4}+1}} \cdot \frac{1}{y^2} dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg \frac{1}{y}}{\frac{\sqrt{y^4+1}}{y^2}} \cdot \frac{1}{y^2} dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg \frac{1}{y}}{\sqrt{y^4+1}} dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg \frac{1}{x}}{\sqrt{x^4+1}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + \arctg \frac{1}{x}}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^4+1}} dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx. \dots\dots\dots 11p$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{10}} dx \leq I \leq \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{10}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \leq I \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \leq I \leq \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{30}} \leq I \leq \frac{3\pi}{2\sqrt{30}} \dots\dots\dots 10p$$