

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A XI-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- Se acordă 16 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. (21p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(5A)$.

b) Determinați matricea A^n , oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Calculați $\det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2026})$.

Soluție:

a) $\det 5A = 5^2 \det A = 25 \cdot 9 = 225$5p

b) Scriem matricea A sub forma $A = 3I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și aplicăm Binomul lui Newton pentru ridicarea la putere a unei matrice. Deoarece $B^2 = O_2$, obținem

$$A^n = C_n^0 3^n I_2 + C_n^1 3^{n-1} B = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \dots\dots\dots 6p$$

$$c) \text{ Calculăm matricea } B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2026} = \sum_{k=1}^{2026} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2026} 3^k & \sum_{k=1}^{2026} k3^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{2026} 3^k \end{pmatrix}.$$

$$\det(B) = \left(\sum_{k=1}^{2026} 3^k \right)^2 = \left[\frac{3(3^{2026} - 1)}{3 - 1} \right]^2 = \left[\frac{3(3^{2026} - 1)}{2} \right]^2 = \frac{9(3^{2026} - 1)^2}{4} \dots\dots\dots 10p$$

2. (21p) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \geq 1$, $a_1 = \frac{2025}{2026}$.

a) Demonstrați că $x^2 - x + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați formula termenului general a șirului $a_n, n \geq 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) Demonstrați că $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{506}{1013}\right)^n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

a) $x^2 - x + \frac{3}{4} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 3p

b) $a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right)^{2^2} = \dots = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^{2^n} = \left(\frac{2025}{2026} - \frac{1}{2}\right)^{2^n} =$
 $= \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ 8p

c) $\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}} = \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^n - 1}$, oricare ar fi $n \geq 1$ 5p

Se arată prin inducție matematică inegalitatea

$$2^n - 1 \geq n, \text{ oricare ar fi } n \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{506}{1013}\right)^{2^n - 1} \leq \left(\frac{506}{1013}\right)^n \text{5p}$$

3. (21p) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ care verifică simultan condițiile $AB + BA = A$ și $B^{2026} = O_2$. Calculați A^{2026} .

George-Florin Șerban, Brăila

Soluție:

$\det B^{2026} = (\det B)^{2026} = \det O_2 \Rightarrow \det B = 0$ 4p

$B^2 - (TrB)B + (\det B)I_2 = O_2 \Rightarrow B^2 = TrB \cdot B \Rightarrow B^n = (TrB)^{n-1} \cdot B$ 6p

I) dacă $TrB = 0 \Rightarrow B^2 = O_2$ 2p

II) dacă $TrB \neq 0 \Rightarrow B^{2026} = (TrB)^{2025} B = O_2 \Rightarrow B = O_2 \Rightarrow B^2 = O_2 \dots\dots\dots 3p$

Din $AB + BA = A \Rightarrow AB^2 + BAB = AB \Rightarrow BAB = AB$.

Din $AB + BA = A \Rightarrow BAB + BA = A \Rightarrow B^2AB + B^2A = BA \Rightarrow BA = O_2 \Rightarrow AB = BAB = O_2B = O_2$,

deci $AB = BA = O_2 \Rightarrow A = AB + BA = O_2 \Rightarrow A^{2026} = O_2^{2026} = O_2 \dots\dots\dots 6p$

4. (21p) Calculați: **a)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. **b)** $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+2x} \cdot \dots \cdot \sqrt{1+nx}-1}{x}, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 5p$

b) $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n \sqrt{1+kx}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+kx} (\sqrt{1+nx})-1}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+kx} (\sqrt{1+nx}-1+1)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+kx}-1 + \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+kx} (\sqrt{1+nx}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+kx}-1}{x} +$

$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+2x} \cdot \dots \cdot (\sqrt{1+nx}-1)}{x} = L_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1 \text{ ori}} (\sqrt{1+nx}-1)}{x} = L_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+nx-1}{x(\sqrt{1+nx}+1)} =$

$= L_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{x(\sqrt{1+nx}+1)} = L_{n-1} + \frac{n}{2} \dots\dots\dots 10p$

$$L_n = L_{n-1} + \frac{n}{2},$$

$$L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = L_1 + \frac{2}{2}, L_3 = L_2 + \frac{3}{2}$$

.....

$$L_{n-1} = L_{n-2} + \frac{n-1}{2}$$

$$L_n = L_{n-1} + \frac{n}{2}$$

$$L_n = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+n) = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} \dots\dots\dots 6p$$