

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 5 FEBRUARIE 2026
CLASA A X-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- Se acordă 16 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. (21p) Determinați funcțiile strict crescătoare $f : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ cu proprietatea: $f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in (0; \infty)$.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

$$f(y \cdot f(x)) = f(y) \cdot f(x) \Rightarrow f(x \cdot f(y)) = f(y \cdot f(x)) \dots\dots\dots 10p$$

$$f \text{ injectivă} \Rightarrow y \cdot f(x) = x \cdot f(y) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \text{ pentru orice } x, y \in (0; \infty). \dots\dots\dots 8p$$

$$\text{Dacă notăm } a = \frac{f(1)}{1} \Rightarrow \text{funcțiile căutate sunt } f(x) = ax, a > 0. \dots\dots\dots 3p$$

2. (21p) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\sqrt[3]{2026^{2x} - 2 \cdot 2026^x + 9} + \sqrt[7]{2026^{2x} - 2 \cdot 2026^x + 2} = 3$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\text{Notăm } 2026^{2x} - 2 \cdot 2026^x + 2 = y \Rightarrow \text{ecuația devine } \sqrt[3]{y+7} + \sqrt[7]{y} = 3 \dots\dots\dots 5p$$

$$f(y) = \sqrt[3]{y+7} + \sqrt[7]{y} \text{ este strict crescătoare} \dots\dots\dots 6p$$

$$\text{Se observă că } y=1 \text{ este soluție} \Rightarrow y=1 \text{ este soluție unică} \dots\dots\dots 5p$$

$$2026^{2x} - 2 \cdot 2026^x + 2 = 1 \Rightarrow (2026^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2026^x = 1 \Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 5p$$

3. (21p) Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c și n număr natural nenul pentru

care are loc inegalitatea $\frac{\log_2^2 a}{n} + \frac{\log_2^2 b}{n+1} + \frac{\log_2^2 c}{n+2} \leq \frac{\log_2^2(abc)}{3(n+1)}$.

a) Demonstrați că numerele $a = 2^{n(n+1)}, b = 2^{(n+1)^2}, c = 2^{(n+1)(n+2)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, verifică inegalitatea din enunț.

b) Determinați toate numerele reale $a, b, c > 0$, care verifică inegalitatea dată.

Mădălina Teodorescu, Brăila

Soluție:

a) Înlocuind $a = 2^{n(n+1)}, b = 2^{(n+1)^2}, c = 2^{(n+1)(n+2)}$ în inegalitate obținem:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{n} + \frac{(n+1)^4}{n+1} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{n+2} \leq \frac{9(n+1)^4}{3(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)^2 + (n+1)^3 + (n+1)^2(n+2) \leq 3(n+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 [n + (n+1) + (n+2)] \leq 3(n+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(n+1)^3 \leq 3(n+1)^3 \dots\dots\dots 7p$$

b) Din inegalitatea lui Bergstrom:

$$\frac{\log_2^2 a}{n} + \frac{\log_2^2 b}{n+1} + \frac{\log_2^2 c}{n+2} \geq \frac{(\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c)^2}{3(n+1)} = \frac{\log_2^2(abc)}{3(n+1)} \dots\dots\dots 9p$$

$$\text{Din ipoteză, știm că } \frac{\log_2^2 a}{n} + \frac{\log_2^2 b}{n+1} + \frac{\log_2^2 c}{n+2} \leq \frac{\log_2^2(abc)}{3(n+1)}$$

În concluzie, $\frac{\log_2^2 a}{n} + \frac{\log_2^2 b}{n+1} + \frac{\log_2^2 c}{n+2} = \frac{\log_2^2(abc)}{3(n+1)}$, egalitate care se obține dacă și numai

$$\text{dacă } \frac{\log_2 a}{n} = \frac{\log_2 b}{n+1} = \frac{\log_2 c}{n+2} = \alpha \Rightarrow a = 2^{\alpha n}, b = 2^{\alpha(n+1)}, c = 2^{\alpha(n+2)} \dots\dots\dots 5p$$

4. (21p) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = 5$, $|z_2| = 12$, $|z_3| = 13$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Determinați lungimile laturilor triunghiului cu vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3 .

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3) \Rightarrow OA = 5; OB = 12; OC = 13 \dots\dots\dots 5p$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0 \Rightarrow \frac{25}{z_1} + \frac{144}{z_2} - \frac{169}{z_1 + z_2} = 0 \Leftrightarrow 25z_2^2 + 144z_1^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = \pm \frac{12}{5}iz_1$$

$$\arg \frac{12i}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m(\angle AOB) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow$$

$$AB = 13 \dots\dots\dots 6p$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow O \text{ este centrul de greutate al triunghiului } ABC \Rightarrow$$

$$OA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \Leftrightarrow 113 = BC^2 - 2AC^2 \quad (1)$$

$$OB^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} \Leftrightarrow 958 = 2BC^2 - AC^2 \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow AC^2 = \frac{732}{3} \text{ și } BC^2 = 601 \Rightarrow AC = 2\sqrt{61} \text{ și } BC = \sqrt{601} \dots\dots\dots 10p$$