

9**Olimpiada Națională de Matematică**
Etape locală, 7 februarie 2026**Clasa a IX-a****AG**
2026**Subiectul I**

- a) Se consideră numerele $A_n = 2026^n - 1$ și $B_n = 2026^n - 2025n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Arătați că A_n este divizibil cu 2025 și B_n este divizibil cu 2025^2 . **10 puncte**
- b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $|[x]| + [|x]| = 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x . **15 puncte**

Subiectul II

Pe latura CD a dreptunghiului ABCD se consideră punctele P și Q astfel încât $DP=PQ=QC$.
Definim punctele R și S prin $2\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$.

- a) Demonstrați că punctele A, C și S sunt coliniare. **15 puncte**
- b) Arătați că punctul Q este centrul de greutate al triunghiului ARS. **10 puncte**

Subiectul III

- a) Arătați că $(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + 2) \geq (a + b + c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. **10 puncte**
- b) Fie $a, b, c > 0$ astfel încât
$$\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \geq 1.$$

Arătați că $ab + bc + ca \leq 3$. **10 puncte**

Subiectul IV

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ astfel încât xy, yz, zx sunt numere raționale.

- a) Arătați că numărul $x^2 + y^2 + z^2$ este rațional. **10 puncte**
- b) Dacă, în plus, $x^3 + y^3 + z^3$ este număr rațional, atunci $x, y, z \in \mathbb{Q}^*$. **10 puncte**

Varianta 3**Notă: Se acordă 10 puncte din oficiu.****Timp de lucru: 3 ore****Fiecare subiect se redactează pe foaie separată.**