

9

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a IX-a

AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

a) $P(n): A_n : 2025, \forall n \in \mathbb{N}$
 $P(0)$ adev.

2p

Se demonstrează $P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$
Presupunem că propoziția $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că și $P(k+1)$ este adevărată, $\forall k \in \mathbb{N}$

3p

$$2026^{k+1} - 1 = 2026(2026^k - 1) + 2025 = \mathcal{M}2025$$

$Q(n) B_n : 2025^2, n \in \mathbb{N}$
 $Q(0)$ adev.

2p

Se demonstrează $Q(k) \rightarrow Q(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$
Presupunem că propoziția $Q(k)$ este adevărată și demonstrăm că și $Q(k+1)$ este adevărată, $\forall k \in \mathbb{N}$

3p

$$\begin{aligned} 2026^{k+1} - 2025k - 2025 - 1 &= \\ &= 2026(2026^k - 2025k - 1) + 2026 \cdot 2025k - 2025k \\ &= 2026(2026^k - 2025k - 1) + 2025^2k = \mathcal{M}2025^2 \end{aligned}$$

b) Numerele $||x||, [x]$ sunt naturale $\Rightarrow [x] \in \{0, 1\}$

5p

1) $[x] = 0 \Rightarrow |x| \in [0, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$
Dar $[x] = 1 \Rightarrow [x] \in \{-1, 1\} \Rightarrow x \in [-1, 0) \cup [1, 2)$
Va rezulta că $x \in (-1, 0)$

5p

2) $[x] = 1 \Rightarrow |x| \in [1, 2) \Rightarrow x \in (-2, -1) \cup [1, 2)$
Dar $[x] = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1)$
Deci, în acest caz $x \in \emptyset$
În final, din cele două cazuri rămâne soluția $x \in (-1, 0)$

5p

Subiectul II – soluție orientativă

$a) \overrightarrow{AR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP})$	3p
$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$	10p
$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow A, C, S \text{ coliniare}$	2p
<p>b) Fie M mijlocul segmentului RS.</p> $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS})$	5p
<p>În triunghiul APC, AQ este mediană</p> $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AR} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AS}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}, \text{ deci Q este}$ <p>centrul de greutate al triunghiului ARS.</p>	5p

Subiectul III – soluție orientativă

a) Din CBS avem $(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2$	5p
$\Rightarrow (a^2 + b^2 + 1)(c^2 + 2) \geq (a + b + c)^2$	
Egalitatea are loc dacă $a = b \neq 0, c = \frac{1}{a}$	5p
<p>b) Din (a) obținem $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} \leq \frac{c^2 + 2}{(a + b + c)^2}$ și analoagele</p> $\frac{1}{b^2 + c^2 + 1} \leq \frac{a^2 + 2}{(a + b + c)^2}$ $\frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \leq \frac{b^2 + 2}{(a + b + c)^2}$	5p
<p>Adunăm aceste relații și obținem:</p> $1 \leq \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 6}{(a + b + c)^2}$ $(a + b + c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 6 \Rightarrow ab + ac + bc \leq 3$	5p

Subiectul IV – soluție orientativă

a) Pentru că $x, y, z \neq 0$, putem considera rapoartele

$$\frac{x}{z} = \frac{xy}{yz} \in \mathbb{Q}^*, \frac{y}{z} = \frac{xy}{zx} \in \mathbb{Q}^*$$

5p

Notăm $\frac{x}{z} = r, r \in \mathbb{Q}^*, \frac{y}{z} = s, s \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow x = rz, y = sz \Rightarrow xy = rsz^2 \in \mathbb{Q}^*$
 $\Rightarrow z^2 = \frac{xy}{rs} \in \mathbb{Q}^*$

3p

$$x^2 = r^2 z^2 \in \mathbb{Q}^*, y^2 = s^2 z^2 \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}^*$$

2p

b) $x^3 + y^3 + z^3 = r^3 z^3 + s^3 z^3 + z^3 = z^3(r^3 + s^3 + 1) \in \mathbb{Q}^*$
 Dar $(r^3 + s^3 + 1) \in \mathbb{Q}^*$ și deci $z^3 \in \mathbb{Q}^*$

5p

$$z^2 \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{z^3}{z^2} = z \in \mathbb{Q}^*$$

$$x = rz \in \mathbb{Q}^*, y = sz \in \mathbb{Q}^*$$

5p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător