

8

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a VIII-a

AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

a) $x^2 + y^2 + 5 = 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (y^2 - 2\sqrt{3}y + 3) = 0$	5 p
$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ și } y = \sqrt{3}$	5 p
$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 5 \in N$	5 p
b) Se raționalizează numitorii prin amplificarea cu conjugatul numitorilor respectivi.	4 p
Se reduc termenii asemenea și se obține ecuația $\sqrt{x+1} = 3 \Rightarrow x = 8$	2 p
Din $8^8 = 16^n \Leftrightarrow 2^{24} = 2^{4n} \Rightarrow n = 6$	4 p

Subiectul II – soluție orientativă

a) Fie U mijlocul muchiei AA' . PQ linie mijlocie în $\Delta A'C'D' \Rightarrow PQ \parallel A'C'$	3 p
$A'C'NU$ este paralelogram $\Rightarrow NU \parallel A'C'$; $PQ \parallel NU$	3 p
$\Rightarrow \sphericalangle(BN; PQ) \equiv \sphericalangle(BN; NU) \equiv \sphericalangle BNU$	3 p
ΔBNU ; $UN = A'C' = a\sqrt{2}$ și $BN = BU = \frac{a\sqrt{5}}{2}$	2 p
Fie X mijlocul NU a.î. $XU = XN = \frac{UN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	2 p
ΔBNX ; $\sphericalangle BXN = 90^\circ \Rightarrow \cos \sphericalangle BNX = \frac{XN}{BN} = \frac{\sqrt{10}}{5}$	2 p
b) $MB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $BG = \frac{2}{3} \cdot BM$; G = centrul de greutate al ΔABD ;	2 p
$DG \cap AB = \{S\}$; $AS = SB = \frac{AB}{2}$; $BM \cap CS = \{T\}$	1 p
$\Delta BCS \equiv \Delta ABM (C.C.) \Rightarrow \sphericalangle STB = 90^\circ \Rightarrow MT \perp CS$	2 p
$PM \perp (ABCD)$ $MT \perp CS$ $MT; CS \subset (ABCD)$ $\Rightarrow T3 \perp \Rightarrow PT \perp CS \Rightarrow d(P; CS) = PT$	2 p
$BT = \frac{a\sqrt{5}}{5}$; $MT = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$	2 p
$d(P; CS) = PT = \frac{a\sqrt{145}}{10}$	1 p

Subiectul III – soluție orientativă

Fie $B'T \perp A'P$; $T \in A'P$	2 p
$\left. \begin{array}{l} CP \perp AB \\ CP \perp AA' \\ AB; AA' \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \Rightarrow CP \perp (ABB'A')$	4 p
$\left. \begin{array}{l} CP \perp (ABB'A') \\ B'T \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \Rightarrow CP \perp B'T$	2 p
$\left. \begin{array}{l} B'T \perp A'P \\ B'T \perp CP \\ A'P; CP \subset (A'PC) \end{array} \right\} \Rightarrow B'T \perp (A'PC)$	4 p
$d(B'; (A'PC)) = B'T$	2 p
$A_{\Delta A'PB'} = \frac{A'B' \cdot d(P; A'B')}{2} = 8cm^2$	2 p
$A_{\Delta A'PB'} = \frac{A'P \cdot B'T}{2} \Rightarrow B'T = \frac{8\sqrt{5}}{5}cm.$	4 p

Subiectul IV – soluție orientativă

Fie $a; b \geq 0$; $m_a = \frac{a+b}{2}$ și $m_g = \sqrt{a \cdot b}$	2 p
$2 \cdot m_a \cdot (2 \cdot m_a - m_g^2) \geq m_g^2 \cdot (3 - m_g^2) \Rightarrow$	
$\Rightarrow 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \left[2 \cdot \frac{a+b}{2} - (\sqrt{a \cdot b})^2 \right] \geq (\sqrt{a \cdot b})^2 \cdot [3 - (\sqrt{a \cdot b})^2]$	2 p
$(a+b) \cdot (a+b - a \cdot b) \geq a \cdot b \cdot (3 - a \cdot b)$	2 p
$(a+b)^2 - (a+b) \cdot a \cdot b \geq 3 \cdot a \cdot b - a^2 \cdot b^2$	2 p
$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 \geq 3 \cdot a \cdot b - a^2 \cdot b^2$	2 p
$2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 - 6 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \geq 0$	2 p
$2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b - 2 \cdot a \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \geq 0$	2 p
$(a-b)^2 + (a-a \cdot b)^2 + (b-a \cdot b)^2 \geq 0$	2 p
$(a-b)^2 + a^2 \cdot (1-b)^2 + b^2 \cdot (1-a)^2 \geq 0$	2 p
Avem egalitate pentru $a = b = 0$ sau $a = b = 1$	2 p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător