

5

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a V-a

AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE (Varianta 3)

Subiectul I – soluție orientativă

a) 18 și 81 sunt două numere „prietene” deoarece $1+8=8+1=9$ (orice alt exemplu se notează corespunzător).	5p
b) Dacă presupunem \overline{ab} = număr prim, atunci b este cifră impară. Considerând numărul „prietin” \overline{cd} , din $b+d=9 \Rightarrow d=9-b$ <small>impar</small> = par $\Rightarrow \overline{cd}$ este număr par, deci divizibil cu 2 $\Rightarrow \overline{cd}$ nu este număr prim.	4p 3p 3p
c) Conform teoremei împărțirii cu rest, $\overline{ab} = 5 \cdot \overline{cd} + 3 \text{ (R}_1\text{)}$	2p
Din definirea numerelor „prietene” \overline{ab} și \overline{cd} și folosind $\begin{cases} a+c=9 \Rightarrow c=9-a \\ b+d=9 \Rightarrow d=9-b \end{cases} \Rightarrow \overline{cd} = 10c+d = 10(9-a)+d =$ $= 90-10a+d = 90-10a+9-b = 99-(10a+b) = 99-\overline{ab}$ Așadar, \overline{ab} și \overline{cd} „prietene” implică $\overline{cd} = 99-\overline{ab} \text{ (R}_2\text{)}$	4p
Din (R_1) și $(R_2) \Rightarrow \overline{ab} = 5 \cdot (99-\overline{ab}) + 3 \Leftrightarrow$ $\overline{ab} = 495 - 5\overline{ab} + 3 \Leftrightarrow 6\overline{ab} = 498 \mid :6 \Rightarrow \overline{ab} = 83 \Rightarrow \begin{cases} c = 9-8 = 1 \\ d = 9-3 = 6 \end{cases}$ și perechea cerută este 83 și 16.	4p

Subiectul II – soluție orientativă

a) Calculează $a = 1 + 3 + 5 + \dots + 79 =$ $(2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2 \cdot 39 + 1)$ 40 paranteze $= 2(0 + 1 + 2 + \dots + 39) + 40 = 2 \cdot \frac{(0+39) \cdot 40}{2} + 40 = 39 \cdot 40 + 40 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 40(39+1) = 40^2 = \text{pătrat perfect.}$	1p 2p
Calculează $b = (2^3)^{10} : (2^4)^6 - (3^3)^9 : (3^2)^{12} - 5^{3+4+5} : (5^3)^4 =$ $= 2^{30-24} - 3^{27-24} - 5^{12} : 5^{12} = 2^6 - 3^3 - 1 = 64 - 27 - 1 = 36 \Rightarrow b = 6^2$ este pătrat perfect	3p
Calculează $c = (81-64+3)^2 + (9+1)^2 + 1 = 20^2 + 10^2 + 1 = 501$ și cum $22^2 = 484 < 501 < 23^2 = 529 \Rightarrow c = 501$ nu este pătrat perfect, fiind cuprins între două pătrate perfecte consecutive.	2p 2p
b) $x = a + b^2 - c = 40^2 + (6^2)^2 - 501 = 1600 + 36^2 - 501 =$ $= 1600 + 1296 - 501 = 2896 - 501 = 2395$ Deci $S(x) = 2+3+9+5 = 19$	4p 4p 2p
c) $n = (x - 14^2 + 2026^0)^{10} = (2395 - 196 + 1)^{10} = 2200^{10} = (22 \cdot 10^2)^{10} = 22^{10} \cdot 10^{20}$, deci n se va termina cu 20 de cifre de zero.	5p

Subiectul III – soluție orientativă

a) $n = 9 \cdot \overline{ab} + (a + b)$, cu condiția impusă de teorema împărțirii cu rest ca $a + b < 9$.	3p
Din condiția $\overline{ab} = \text{pătrat perfect}$ și $a + b < 9 \Rightarrow \overline{ab} \in \{16; 25\}$.	4p
Cazul $\overline{ab} = 16 \Rightarrow n = 9 \cdot 16 + (1 + 6) = 144 + 7 = 151$	2p
Cazul $\overline{ab} = 25 \Rightarrow n = 9 \cdot 25 + (2 + 5) = 225 + 7 = 232$.	
Soluțiile sunt $\{151; 232\}$.	1p
b) Notăm a cincea parte din cartea citită de primul cu x , iar cu y , a șaptea parte din cartea citită de al doilea . Conform ipotezei problemei $x = y + 16$ (R_1)	2p
Cum cărțile au același număr de pagini, deducem $5x = 7y$ (R_2)	2p
Prin înlocuirea primei relații în cea de-a doua $\Rightarrow 5(y + 16) = 7y \Leftrightarrow 2y = 80 \Rightarrow y = 40$ de pagini.	2p
Înlocuind în (R_1) obținem $x = y + 16 = 40 + 16 = 56$ de pagini	2p
Așadar, numărul de pagini pentru fiecare carte este $5 \cdot 56 = 40 \cdot 7 = 280$ de pagini. Elevii mai au deci de citit următoarele numere de pagini: - primul $280 - 56 = 224$ de pagini - al doilea $280 - 40 = 240$ de pagini.	2p

Subiectul IV – soluție orientativă

a) Utilizând principiul ultimei cifre, $U(3^{2025} + 3) = U(3^{4 \cdot 506 + 1} + 3) = U(3^{4 \cdot k + 1} + 3) = 6$.	10p
Soluție alternativă : $3^{2025} + 3 = 3 \cdot 3^{2024} + 3 = 3 \cdot 9^{1012} + 3 = 3(10 - 1)^{1012} + 3 = 3 \cdot (M_{10} + 1) + 3 =$ $= M_{10} + 3 + 3 = M_{10} + 6 = \dots 6$	
b) Cum $\begin{cases} \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} \\ \text{iar} \\ 4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} \end{cases} \Rightarrow$	5p
$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot \overline{ab} \Rightarrow \overline{abcd} = 104 \cdot \overline{ab}$ (și cum $104 = 13 \cdot 8$)	3p
$\overline{abcd} = 13 \cdot 8 \cdot \overline{ab} \Rightarrow 13$ și 8 sunt divizori ai numărului \overline{abcd} .	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător

Varianta 3