

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a XII-a

AG
2026

Subiectul I

Pe mulțimea Z definim legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 18x - 18y + 171$.a) Arătați că legea ” $*$ ” nu admite element neutru.

10 puncte

b) Arătați că $\underbrace{x * x * x \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-9)^n + 9$, oricare ar fi $n \in N, n \geq 2$.

10 puncte

c) Calculați $d_1 * d_2 * \dots * d_m$, unde $d_1, d_2, \dots, d_m, m \in N, m \geq 1$ sunt divizorii întregi ai numărului $a = 3n \cdot 10^n - 4^n + 1, n \in N^*$.

5 puncte

Subiectul II

a) Calculați $\int_0^1 \frac{x \cdot \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

10 puncte

b) Calculați $\int_1^e (x^n \ln x + \ln x) dx$.

15 puncte

Subiectul III

Fie mulțimea $G = \left\{ f_n : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty) \mid f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n}, n \in Z \right\}$.a) Arătați că $f_n \circ f_m = f_{n+m}$, oricare ar fi $n, m \in Z$, unde ” \circ ” este operația de compunere a funcțiilor.

10 puncte

b) Demonstrați că (G, \circ) este un grup comutativ.

10 puncte

Subiectul IV

Fie $f : \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \rightarrow R$ o funcție continuă și monotonă cu proprietatea că $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x) \cdot (1-x^2)}{1+x^2+x^4} dx = 0$.Arătați că $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x \cdot f(x)}{1+x^2} dx = f(2) \cdot \ln 2$.

20 puncte

Varianta 3

Notă: Se acordă 10 puncte din oficiu

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect se redactează pe foaie separată.