

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a XII-a

AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

a) Presupunem că există $e \in Z$, astfel încât $x * e = x, \forall x \in Z$, atunci $2xe - 19x - 18e + 171 = 0, \forall x \in Z$	5p
Pentru $x = 0 \Rightarrow 18e = 171$, fals, deci legea nu are element neutru	5p
b) $x * y = 2(x - 9)(y - 9) + 9, \forall x, y \in Z$	2p
Notăm $P(n) : \underbrace{x * x * x \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x - 9)^n + 9$, $P(2) : x * x = 2(x - 9)^2 + 9$, adevărată	3p
Demonstrarea implicației $P(k)$ adevărată $\Rightarrow P(k + 1)$ adevărată	5p
c) Arătăm că printre divizorii d_1, d_2, \dots, d_m se va afla și numărul 9 Avem că $x * 9 = 9 * x = 9, \forall x \in Z$	1p
$a = 3n \cdot 10^n - 4^n + 1 = 3n \cdot 10^n - 3n + 3n - 4^n + 1 = 3n(10^n - 1) + 3n + 1 - 4^n =$ $3n(10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) + 3n - (4^n - 1) =$ $M_9 + 3n - (4 - 1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1) =$ $M_9 + 3n - 3 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4 + 1) =$ $M_9 + 3 \left[(1 - 4^{n-1}) + (1 - 4^{n-2}) + \dots + (1 - 4) \right] =$ $M_9 + 3 \cdot (M_3 + M_3 + \dots + M_3) = M_9$	3p
Astfel există d_k este divizibil cu $\Rightarrow d_1 * d_2 * \dots * d_k * \dots * d_m = 9$	1p

Subiectul II – soluție orientativă

a) $\int_0^1 \frac{x \cdot \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2} \right)' \cdot \arctg x dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1} =$	5p
$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \ln(1+\sqrt{2})$	5p
b) $\int_1^e (x^n \ln x + \ln x) dx = \int_1^e x^n \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$	3p
$\int_1^e x^n \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \ln x dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$	5p

$$\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e x' \ln x \, dx = e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = 1$$

5p

$$\int_1^e (x^n \ln x + \ln x) \, dx = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2} + 1$$

2p

Subiectul III – soluție orientativă

a) $(f_n \circ f_m)(x) = f_n(f_m(x)) = 2 + (f_m(x) - 2)^{2^n} =$

5p

$$2 + \left(2 + (x - 2)^{2^m} - 2\right)^{2^n} = 2 + (x - 2)^{2^{m+n}} = f_{m+n}(x)$$

5p

b) Din a) obținem că operația este internă; ”o” este asociativă;

5p

Elementul neutru este f_0 ; inversa funcției f_n este f_{-n} ; comutativitatea rezultă din a)

5p

Deducem că (G, \circ) este grup comutativ

Subiectul IV – soluție orientativă

Notăm $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)(1-x^2)}{x^4+x^2+1} \, dx$. Folosim schimbarea de variabilă

3p

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt; \text{ iar pentru } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, \text{ obținem că } t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Atunci } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{1+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)(1-t^2)}{t^4+t^2+1} dt \Rightarrow I = -\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)(1-x^2)}{x^4+x^2+1} dx$$

3p

Prin adunare obținem $2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(1-x^2)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^4+x^2+1} dx$ și cum $I = 0$, obținem că

4p

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(1-x^2)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^4+x^2+1} dx = 0$$

Considerăm funcția $g: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{(1-x^2)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^4+x^2+1}$, care este continuă

Cazul 1. Dacă f este crescătoare

5p

• dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{1}{x}\right)$, de unde

$$(1-x^2)\left(f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

• dacă $x \in (1, 2] \Rightarrow 1 < x \Rightarrow \frac{1}{x} < x \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x)$, de unde

$$(1-x^2)\left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in (1, 2]$$

$$\text{Cum } g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Analog cazul când f este descrescătoare

Cum g este continuă pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(x) \leq 0$, și

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) dx = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Arătăm că funcția f este constantă. Observăm că $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

• dacă f este crescătoare

$$\text{Fie } \frac{1}{2} < x < 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow f(x) = f(2)$$

• dacă f este descrescătoare

$$\text{Fie } \frac{1}{2} < x < 2 \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) = f(2)$$

$$\text{Atunci } \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x \cdot f(x)}{1+x^2} dx = f(2) \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x}{1+x^2} dx = f(2) \cdot \ln 2$$

5p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător