

11

 Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a XI-a

 AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. a) Să se determine numerele reale α_1, α_2 astfel încât $\det(A - \alpha I_2) = 0$, <i>precum și matricele $B, C \in M_2(R)$ astfel încât</i> <i>formula matricei $A^n = \alpha_1^n B + \alpha_2^n C$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.</i> b) Arătați că urma matricei A^n este $1 + 2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	
Soluție:	
a) $\det(A - \alpha I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\alpha & -3 \\ 2 & 4-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$	6p
$\alpha_1 = 1 ; \alpha_2 = 2$ $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$	3p
$A^n = \alpha_1^n B + \alpha_2^n C \Rightarrow \begin{cases} A^1 = \alpha_1^1 B + \alpha_2^1 C \\ A^2 = \alpha_1^2 B + \alpha_2^2 C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 2C \\ A^2 = B + 4C \end{cases}$ $A^2 - A = 2C \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	3p
$B = A - 2C \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	3p
b) $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 3 - 3 \cdot 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$	5p
Urma matricei A^n este $tr(A^n) = 3 - 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n - 2 = 1 + 2^n(-2 + 3) = 1 + 2^n$	5p

Subiectul II – soluție orientativă

Se consideră șirul numerelor naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ care nu sunt divizibile cu 4 și anume: 1;2;3;5;6;7;9;10;11;13;14; a) Să se determine formula termenului general. b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$. c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n+1}}{n^2}$. Soluție:	
--	--

<p>a) $a_n = \begin{cases} 4p+1, & \text{dacă } n = 3p+1 \\ 4p+2, & \text{dacă } n = 3p+2 \\ 4p+3, & \text{dacă } n = 3p+3 \\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$</p>	<p>3 x 3p 1p</p>
<p>b) $n \rightarrow +\infty \Rightarrow n = 3p+1 \rightarrow +\infty \Rightarrow p = \frac{n-1}{3} \rightarrow +\infty \Rightarrow p \rightarrow +\infty$</p>	<p>1p</p>
<p>Caz I) $n = 3p+1, p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_{3p+1}}{3p+1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{4p+1}{3p+1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p(4+\frac{1}{p})}{p(3+\frac{1}{p})} = \frac{4}{3}$ Caz II) $n = 3p+2, p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_{3p+2}}{3p+2} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{4p+2}{3p+2} = \frac{4}{3}$ Caz III) $n = 3p+3, p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_{3p+3}}{3p+3} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{4p+3}{3p+3} = \frac{4}{3}$ Deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{4}{3}$.</p>	<p>9p</p>
<p>c) $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n+1} = 4 \cdot 0 + 1 + 4 \cdot 1 + 1 + 4 \cdot 2 + 1 + \dots + 4n + 1 =$ $= 4(0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$ $= 2n(n+1) + (n+1) =$ $= (n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n+1}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = 2$ Altă soluție poate utiliza lema Cesaro – Stolz.</p>	<p>5p</p>

Subiectul III – soluție orientativă

A) Rezolvați ecuația $Y^2 = O_2$, unde $Y \in M_2(\mathbb{R})$.

B) Determinați matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $4A^2 - 4A + I_2 = O_2$.

Soluție:

<p>A) Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.</p>	<p>4p</p>
<p>Ecuația $Y^2 = O_2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ sau } a+d = 0 \\ c(a+d) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ sau } a+d = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases}$</p>	<p>3p</p>
<p>C1) $b=0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ și $d=0$ C2) $c=0 \Rightarrow a=0$ și $d=0$ Soluțiile sunt : $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}$, C3) $a+d=0 \Rightarrow d=-a$ $a^2 + bc = 0 \Rightarrow bc = -a^2 \Rightarrow b = -\frac{a^2}{c}$ $Y_3 = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}^*$, $a^2 + bc = 0 \Rightarrow bc = -a^2 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b}$ $Y_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^*$</p>	<p>8p</p>

b) Ecuația $4A^2 - 4A + I_2 = O_2$ este echivalentă cu $\left(A - \frac{1}{2}I_2\right)^2 = O_2$	3p
$A_i = Y_i + \frac{1}{2}I_2, i \in \{1, 2, 3, 4\}$	2p

Subiectul IV – soluție orientativă

Se consideră șirul definit prin $L_0 = 2, L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se determine numerele reale a, b, r_1, r_2 astfel încât $L_n = ar_1^n + br_2^n, n \in \mathbb{N}$, iar r_1 și r_2 sunt soluțiile ecuației caracteristice $r^2 = r + 1$, precum și formula termenului general L_n .

- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{L_{n+2}}{L_n}}$.

Soluție:

- a) Ecuația caracteristică este echivalentă cu

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Din relațiile $\begin{cases} L_0 = ar_1^0 + br_2^0 \\ L_1 = ar_1^1 + br_2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ar_1 + br_2 = 1 \end{cases}$
se obțin $a = 1, b = 1$

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{n+2}}{L_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_2^{n+2} + r_1^{n+2}}{r_2^n + r_1^n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{n+2}}{L_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_2^{n+2} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+2}\right]}{r_2^n \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right]} = >$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{n+2}}{L_n} = r_2^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{L_{n+2}}{L_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător