

10**Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026****Clasa a X-a****AG
2026****Subiectul I**Fie $a, b \in (0, 1)$.

a) Demonstrați că $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

5 puncte

b) Arătați că $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

20 puncte**Subiectul II**Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, astfel încât $z^3 = 1$.

a) Să se arate că $z^2 + z + 1 = 0$.

5 puncte

b) Să se demonstreze că $|z - 1| \geq 1$.

15 puncte**Subiectul III**

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) Să se arate că f este pară și $f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10 puncte

b) Să se studieze monotonia funcției f .

15 puncte**Subiectul IV**Determinați $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x + g(y)) = 2g(x) + f(y) + 4y$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.**20 puncte****Varianta 3****Notă:**

*Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect se redactează pe foaie separată.
Se acordă 10 puncte din oficiu.*