

10

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 7 februarie 2026

Clasa a X-a

AG
2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I

Fie $a, b \in (0, 1)$.

a) Demonstrați că $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

b) Arătați că $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

Soluție și barem orientativ:

a) Demonstrează inegalitatea

5 p

b) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ și $a, b \in (0, 1)$ duce la $\log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$.

5 p

Analog, $\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_b a)$.

5 p

Se obține că membrul stâng este mai mare sau egal cu $\frac{1}{2}(2 + \log_a b + \log_b a)$.

5 p

Cum $\log_a b, \log_b a > 0$, se obține inegalitatea cerută.

5 p

Subiectul II

Fie $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, astfel încât $z^3 = 1$.

a) Să se arate că $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Să se demonstreze că $|z - 1| \geq 1$.

Soluție și barem orientativ:

a) Demonstrează egalitatea

5 p

b) $z^2 + z + 1 = 0$ duce la $z^2 - 1 + z - 1 = -3$ echivalentă cu $(z - 1)(z + 1) + z - 1 = -3$, de unde $(z - 1)(z + 2) = -3$.

5 p

Se obține $z - 1 = \frac{-3}{z + 2}$ și $|z - 1| = \frac{3}{|z + 2|}$.

5 p

Cum $|z + 2| \leq |z| + 2 = 3$, se obține inegalitatea dorită.

5 p

Subiectul III

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) Să se arate că f este pară și $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f .

Soluție și barem orientativ:

a) Arată că $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$	5 p
Demonstrează inegalitatea.	5 p
b) Pentru $x < y$ se calculează $f(y) - f(x)$, sau folosește compunere de funcții	5 p
Se arată că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$	5 p
Se deduce că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$	5 p

Subiectul IV

Determinați $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x + g(y)) = 2g(x) + f(y) + 4y$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Soluție și barem orientativ:

Dacă $f(x)$ satisface enunțul, atunci și $f(x) - f(0)$ satisface și este suficient să determinăm f cu $f(0) = 0$	5 p
Dacă $f(0) = 0$ se arată că g este surjectivă și $g(0) = 0$, iar $f(x) = 2g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$	5 p
Se obține că g satisface relația $g(x - 2y) = g(x) + g(-2y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$	5 p
Se obține că g satisface ecuația funcțională a lui Cauchy și se determină funcțiile f, g .	5 p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător