

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025  
Clasa a XI-a  
Barem de notare și evaluare**

**Problema 1**

Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  astfel încât  $\det A = a + d = 1$ .

Să se determine numărul elementelor mulțimii  $\{A^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Barem**

Pentru  $b = 0$  nu se verifică ipoteza .

Pentru  $b \neq 0$ ,  $\det A = \text{tr } A = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-a+1}{b} & 1-a \end{pmatrix}$  ..... 2p

Avem  $A^2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ -\frac{a^2-a+1}{b} & -a \end{pmatrix}$  ..... 1p

$A^3 = -I_2$ ,  $A^4 = -A$ ,  $A^5 = -A^2$ ,  $A^6 = I_2$  ..... 2p

Prin inducție rezultă că  $\{A^n | n \in \mathbb{N}^*\} = \{\pm I_2, \pm A, \pm A^2\}$ .

Elementele fiind distincte, cardinalul mulțimii este 6. ....2p

**Problema 2**

Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a + d = 3$ ,  $ad - bc = 2$ .

a) Să se arate că  $A^3 = 7A - 6I_2$ .

b) Să se calculeze  $\det(A^2 + 2I_2)$ .

**Barem**

a)  $A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$  .....2p

$A^2 = 3A - 2I_2$ , înmulțind cu  $A$ ,

$A^3 = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I_2) - 2A = 7A - 6I_2$  .....1p

b) Din relația de la a),  $\det(A^2 + 2I_2) = \det(3A) = 3^2 \det A = 18$  ..... 4p

**Problema 3**

Se consideră șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\ln n}$ .



Barem

- a) Primii patru termeni  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{5}{2}, a_4 = \frac{29}{12}$  sunt  $< 3$  ..... 1p

Presupunem  $a_n < 3$ . Atunci  $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n} < \frac{10}{n} < 3$ , pentru  $n \geq 4$ , deci șirul este mărginit superior de 3 ..... 2p

Putem scrie  $0 < a_n < \frac{10}{n-1}$  pentru  $n \geq 4$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ..... 1p

- b) Folosind teorema Stolz-Cesaro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{\ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a_n^2}{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a_n^2}{\ln(1 + \frac{1}{n})^n} = 1$$

..... 3p

#### Problema 4.

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația  $|f(x) - x \sin x| \leq |x^3|$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ .

Barem

$$-|x^3| \leq f(x) - x \sin x \leq |x^3| \text{ sau } x \sin x - |x^3| \leq f(x) \leq x \sin x + |x^3| \text{ ..... 3p}$$

Împărțind prin  $x^2$ , relația devine  $\frac{\sin x}{x} - |x| \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x} + |x|$ , pentru  $x \in \mathbb{R}^*$  ..... 2p

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} - |x| \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} + |x| \right) = 1$ , rezultă  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$  ..... 2p