

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025
Clasa a XI-a**

Problema 1

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $\det A = a + d = 1$.

Să se determine numărul elementelor mulțimii $\{A^n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

Problema 2

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + d = 3$, $ad - bc = 2$.

a) Să se arate că $A^3 = 7A - 6I_2$.

b) Să se calculeze $\det(A^2 + 2I_2)$.

Problema 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\ln n}$.

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $|f(x) - x \sin x| \leq |x^3|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Notă: timp de lucru-3ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii.