



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025
Clasa a XII-a
Barem de notare și evaluare

Problema 1

Fie grupul $(G, *)$, unde $G = (0,1)$ și legea de compoziție

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1} \quad \text{definită pe mulțimea } G.$$

a) Să se determine $a \in (0, \infty)$ astfel încât funcția $f: G \rightarrow (0, \infty)$,

$$f(x) = \frac{ax}{1-x} \text{ să fie izomorfism de la grupul } (G, *) \text{ la grupul } (\mathbb{R}_+^*, \cdot).$$

b) Să se arate că $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2025} = \frac{1}{2024!+1}$.

Barem

a) Elementul neutru al legii este $\frac{1}{2}$ și din condiția $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

rezultă $a = 1$, care verifică izomorfismul 3p

b) Folosind izomorfismul $f: G \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{x}{1-x}$ rezultă

$$f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2025}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \dots f\left(\frac{1}{2025}\right) = \frac{1}{2024!},$$

de unde rezultă relația..... 4p

Problema 2

Se consideră matricele : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze Y^2 , Y^3 și Y^4 ;

b) Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \{A | A = I_3 + a \cdot Y + b \cdot Y^2, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Să se arate că înmulțirea matricelor este o lege de compoziție pe \mathcal{M} și că față de această lege de compoziție \mathcal{M} este grup comutativ.

Barem

a) $Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

b) Se va arăta că \mathcal{M} este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

Dacă $A_1 = I_3 + a_1 \cdot Y + b_1 \cdot Y^2$ și $A_2 = I_3 + a_2 \cdot Y + b_2 \cdot Y^2$, deducem că

$$A_1 \cdot A_2 = I_3 + (a_1 + a_2) \cdot Y + (a_1 a_2 + b_1 + b_2) \cdot Y^2 \in \mathcal{M}. \dots\dots\dots 2p$$

Rezultă și comutativitatea. Elementul neutru $I_3 \in \mathcal{M}$ 2p



Deoarece pentru $\forall A \in \mathcal{M}$, $\det(A) = 1$, rezultă că există matricea inversă :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 - a - b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3

Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

a) Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx < \frac{1}{2}\ln 2$

b) Să se calculeze $a_n = \int_1^n f(x)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Barem

$$a) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \ln \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \ln 2 < \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 \dots\dots\dots 3p$$

b) Cu formula Leibniz Newton, $a_n = \ln n - \frac{1}{2} \ln(1+n^2) + \frac{1}{2} \ln 2$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} \ln 2 \dots\dots\dots 4p$$

Problema 4

Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arctg x$.

a) Să se arate că f este strict crescătoare și $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{\int_0^x f(t)dt}} = \sqrt{2}$.

Barem

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} > 0$, pentru $x > 0$, deci f este strict crescătoare și cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) \geq 0 \dots\dots\dots 2p$

$$b) \int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{2} - \int_0^x t' \arctg t dt = \frac{x^2}{2} - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)|_0^x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots 2p$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{\int_0^x f(t)dt}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\arctg x}{x} + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2x^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} - 0 + 0}} = \sqrt{2} \dots\dots\dots 3p$$