



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025

Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

**PROBLEMA 1**

Fie  $x, y, z \in (0, \infty)$  care verifică relația  $x + y + z = a$ . Să se arate că

$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} < \frac{3a}{2}.$$

**Barem**

Folosim inegalitatea mediilor  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  ..... 2p

$$\text{Rezultă } \sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} < \frac{x+(y+z)}{2} + \frac{y+(x+z)}{2} + \frac{z+(x+y)}{2},$$

$$\text{adică } \sqrt{xy+xz} + \sqrt{xy+yz} + \sqrt{xz+yz} < \frac{3a}{2} \text{ ..... 4p}$$

Egalitatea nu este posibilă deoarece ar rezulta  $x = y + z$ ,  $y = x + z$ ,  $z = x + y$ , adică

$x = y = z = 0$ , fals.....1p

**PROBLEMA 2**

Să se rezolve în  $R$  ecuația

$$[2x] - [x] = 2x$$

unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .

**Barem**

Cunoaștem că  $[x] \in Z$ ,  $[2x] \in Z$  ..... 2p

Cum  $[2x] - [x] = 2x \Rightarrow 2x \in Z$  ..... 1p

Notăm  $2x = k$ ,  $k \in Z \Rightarrow x = \frac{k}{2}$ ,  $k \in Z$  ..... 1p

Înlocuim în ecuație  $\left[2 \cdot \frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = 2 \cdot \frac{k}{2} \Rightarrow k - \left[\frac{k}{2}\right] = k \Rightarrow \left[\frac{k}{2}\right] = 0$  ..... 1p

Putem scrie  $0 \leq \frac{k}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq k < 2$ ,  $k \in Z \Rightarrow k \in \{0, 1\}$  ..... 1p

Din  $x = \frac{k}{2}$  obținem  $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$  ..... 1p

**PROBLEMA 3**

Se consideră o mulțime  $M$  de numere reale care are următoarele două proprietăți:

(1)  $1 \in M$

(2) Dacă  $x \in M$  și  $(x + 2y) \in M$ , atunci  $y \in M$

Arătați că:

a)  $\frac{1}{4} \in M$

b)  $\frac{1}{2^n} \in M$  pentru orice număr natural  $n$ .



**Barem**

- a) Din  $1 \in M$  și  $1 + 2 \cdot 0 = 1 \in M \Rightarrow 0 \in M$  ..... 1p  
 Din  $0 \in M$  și  $0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \in M \Rightarrow \frac{1}{2} \in M$  ..... 1p  
 Din  $0 \in M$  și  $0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \in M \Rightarrow \frac{1}{4} \in M$  ..... 1p
- b) Folosind metoda inducției matematice  $\frac{1}{2^0} = 1 \in M$  ..... 1p  
 Presupunem  $\frac{1}{2^n} \in M$  ..... 1p  
 Din  $0 \in M$  și  $0 + 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \in M \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \in M$  ..... 1p  
 Prin urmare  $\frac{1}{2^n} \in M$  pentru orice număr natural  $n$  ..... 1p

**PROBLEMA 4**

Fie  $ABC$  un triunghi și  $M$  un punct în interiorul triunghiului, iar  $G_A, G_B, G_C$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $MBC, MAC$ , respectiv  $MAB$ .

- a) Arătați că  $\overrightarrow{G_A G_B} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{G_B G_C} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{G_C G_A} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ .  
 b) Arătați că  $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0}$  dacă și numai dacă  $M$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

**Barem**

- a) Dacă  $O$  este un punct în plan, folosind formula pentru vectorul de poziție al centrului de greutate, rezultă  $\overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$  ..... 1p  
 Analog  $\overrightarrow{G_B G_C} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$  ..... 1p  
 și  $\overrightarrow{G_C G_A} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$  ..... 1p
- b) În triunghiul  $MBC, \overrightarrow{MG_A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}), \overrightarrow{AG_A} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG_A} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$  ..... 1p  
 Analog  $\overrightarrow{BG_B} = \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}), \overrightarrow{CG_C} = \overrightarrow{CM} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$  ..... 2p  
 Rezultă  $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM}) = \frac{1}{3} \cdot 3\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G$ ,  
 unde cu  $G$  s-a notat centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  ..... 1p