

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ -09 februarie 2025**

Clasa a VII-a

Barem de notare și evaluare

PROBLEMA 1

a) Fie $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{4098600}}$.

Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $\sqrt{n \cdot a}$ este număr natural.

b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care

$$N = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$$
 este număr întreg.

Barem:

a) Distribuirea numitorilor și reducerea termenilor1p

$a = \frac{44}{45}$ 1p

$n \cdot a = \text{pătrat perfect} \Rightarrow n = 495$ 1p

b) $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}$, $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$ 2p

$N = \frac{3}{x-7} \in \mathbb{Z}$ 1p

$x \in \{4,6,8,10\}$ 1p

PROBLEMA 2

a) Să se afle x știind că este îndeplinită condiția:

$$\frac{x+1}{2025} = \frac{\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2024}}{2024}$$

b) Arătați că numărul \sqrt{a} este rațional, unde $a = \left(2024 + \frac{1013}{\sqrt{1+3+5+\dots+2025}}\right)^{2025} : 2025$

Barem:

a) $\frac{1}{1+2} = \frac{2}{2 \cdot 3}$; $\frac{1}{1+2+3} = \frac{2}{3 \cdot 4}$ $\frac{1}{1+2+3+\dots+2024} = \frac{2}{2024 \cdot 2025}$ 2p

$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2024} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}\right) = \frac{2023}{2025}$ 1p

$$\frac{x+1}{2025} = \frac{\frac{2023}{2025}}{\frac{2024}{2025}} \Rightarrow x+1 = \frac{2023}{2024} \text{ și deci } x = -\frac{1}{2024} \dots\dots\dots 1p$$

b) $1+3+5+\dots+2025=1013^2 \dots\dots\dots 1p$

$a = 2025^{2024} \dots\dots\dots 1p$

$\sqrt{a} = \sqrt{2025^{2024}} = 2025^{1012} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

PROBLEMA 3

Fie ABC un triunghi echilateral, $D \in BC$ astfel încât $(DC) \equiv (BC)$ și $E \in AC$ astfel încât $(AE) \equiv (AC)$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, arătați că $AB = 3 AF$.

Barem:

Construim $CP \parallel AB, P \in DE \dots\dots\dots 2p$

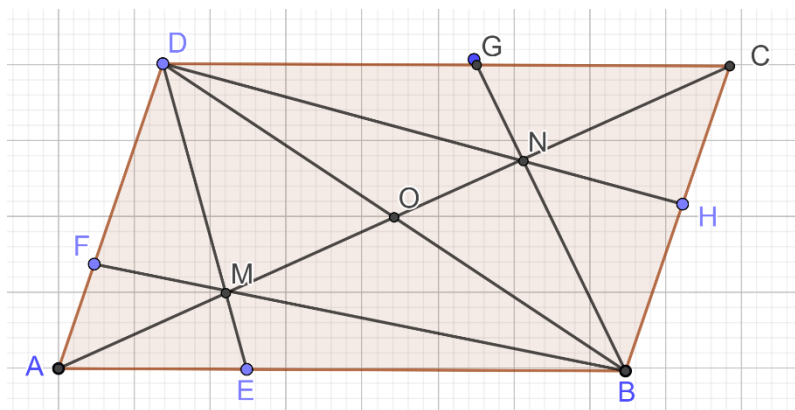
În $\triangle CPE, AF$ linie mijlocie implică $CP = 2 \cdot AF \dots\dots\dots 2p$

În $\triangle BDF, CP$ linie mijlocie implică $BF = 2 \cdot CP$, deci $BF = 4 \cdot AF$ sau $AB + AF = 4 \cdot AF$, de unde $AB = 3 AF \dots\dots\dots 3p$

PROBLEMA 4

Fie M și N puncte pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$, de o parte și de alta a dreptei BD , astfel încât $OM = ON$, O fiind intersecția diagonalelor, iar punctul M este situat între punctele A și O . Dreptele BM, DM, BN și DN intersectează laturile AD, AB, DC , respectiv BC , în punctele F, E, G , respectiv H . Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

Barem:





Diagonalele MN, DB se taie în părți congruente \Rightarrow BMDN paralelogram.....1p
BMDN paralelogram \Rightarrow FB \parallel DH.....1p
și
ABCD paralelogram AD \parallel BC, F \in AD și H \in BC \Rightarrow FD \parallel HB
 \Rightarrow BFDH paralelogram.....1p
diagonala FH trece prin O, FO =OH1p
BFDH paralelogram \Rightarrow DM \parallel BN1p
și
ABCD paralelogram AB \parallel DC, E \in AB și G \in DC \Rightarrow DG \parallel EB
 \Rightarrow DEBG paralelogram.....1p
diagonala EG trece prin O, EO =OG
FH, EG – diagonale în patrulaterul EFGH, FO =OH, EO =OG \Rightarrow EFGH paralelogram.....1p