

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025  
Clasa a X-a**

**Problema 1**

Fie  $x, a, b, c > 1$ . Știind că numerele  $\log_{bc} x, \log_{ac} x, \log_{ab} x$  sunt în progresie aritmetică, să se arate că numerele  $(\log_x a)^2, (\log_x b)^2, (\log_x c)^2$  sunt în progresie aritmetică.

**Problema 2**

Fie  $A = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2025} = i\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{47} = -i\}$

- a) Dacă  $x \in B$ , să se calculeze  $x^{2021}$ .
- b) Să se determine  $A \cap B$ .

**Problema 3**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2), \forall x_1, x_2 \in (0, \infty).$$

- a) Arătați că  $f(1) = 0$ ;
- b) Arătați că, dacă 1 este singura soluție a ecuației  $f(x) = 0$ , atunci funcția  $f$  este injectivă.

**Problema 4.**

Să se rezolve în  $\mathbb{C}$  ecuația:

$$|z| + |z - 1| + |z - 2| + \dots + |z - 2025| = 1013^2.$$

**Notă: timp de lucru-3ore.**

**Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.**

**Nu se acordă puncte din oficiu.**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**