

**Olimpiada Națională de Matematică 2025**  
**Etapa locală – Teleorman, 09 februarie 2025**  
**Clasa a VI-a**

**Barem de notare și evaluare**

**PROBLEMA 1**

Să se afle numerele  $a$  și  $n$ , știind că  $a$  este număr prim,  $n \in \mathbb{N}^*$  și

$$a^{2n} - 5 = 4 \cdot (5 + 5^2 + \dots + 5^{2025})$$

**Barem:**

$$a^{2n} - 5 = 4 \cdot (5 + 5^2 + \dots + 5^{2025}) \quad | +5 \Rightarrow$$

$$a^{2n} = 5 + 4 \cdot (5 + 5^2 + \dots + 5^{2025}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a^{2n} = 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025}$$

$$a^{2n} = 5 \cdot (1 + 4) + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a^{2n} = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025} \Rightarrow$$

$$a^{2n} = 5^2 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025} \Rightarrow$$

$$a^{2n} = 5^2 \cdot (1 + 4) + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a^{2n} = 5^3 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{2025}$$

$\vdots$

$$a^{2n} = 5^{2025} + 4 \cdot 5^{2025} \Rightarrow a^{2n} = 5^{2025} \cdot (1 + 4) \Rightarrow a^{2n} = 5^{2025} \cdot 5 \Rightarrow a^{2n} = 5^{2026} \quad \dots\dots 1p$$

$$\text{Cum, } a \text{ este număr prim} \Rightarrow a = 5 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$5^{2n} = 5^{2026} \Rightarrow 2 \cdot n = 2026 \quad | :2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$n = 1013 \quad \dots\dots\dots 1p$$

**PROBLEMA 2**

Determinați numerele  $a, b \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $a^2 + b^2 = 832$  și  $(a; b) = 8$ .

**Barem:**

Din  $(a; b) = 8 \Rightarrow$  există  $x, y \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x; y) = 1$  astfel încât  $a = 8 \cdot x$  și

$$b = 8 \cdot y \quad \dots\dots\dots 1p$$

Înlocuind în relația  $a^2 + b^2 = 832$  pe  $a = 8 \cdot x$  și  $b = 8 \cdot y$ , obținem:

$$(8 \cdot x)^2 + (8 \cdot y)^2 = 832 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$64 \cdot x^2 + 64 \cdot y^2 = 832 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$64 \cdot (x^2 + y^2) = 832 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$x^2 + y^2 = 832 : 64 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots\dots 1p$$



- I.  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \cdot 2 \\ b = 8 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\begin{cases} a = 16 \\ b = 24 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$   
*sau*
- II.  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \cdot 3 \\ b = 8 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$   
 $\begin{cases} a = 24 \\ b = 16 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$

### PROBLEMA 3

În interiorul segmentului  $AB = 160 \text{ mm}$  se consideră punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $3 \cdot AC = 2 \cdot BC$  și  $5 \cdot AD = 3 \cdot BD$ .

- Calculați lungimile segmentelor  $AC$  și  $BD$ .
- Stabiliți ordinea punctelor  $A, B, C, D$  pe segmentul  $AB$ .

#### Barem:

- a)  $AB = AC + CB$ ,  $AB = 160 \text{ mm} \Rightarrow 160 = AC + CB \quad | \cdot 2 \dots\dots\dots 1p$   
 $320 = 2 \cdot AC + 2 \cdot CB$ , dar,  $2 \cdot CB = 3 \cdot AC \Rightarrow 2 \cdot AC + 3 \cdot AC = 320 \Rightarrow 5 \cdot AC = 320$   
 $\Rightarrow AC = 64 \text{ mm} \dots\dots\dots 1p$   
 $AB = AD + DB \quad | \cdot 3 \Rightarrow$   
 $3 \cdot AD + 3 \cdot DB = 3 \cdot AB \Rightarrow 3 \cdot AD + 3 \cdot DB = 480 \dots\dots\dots 1p$   
 Dar,  $3 \cdot DB = 5 \cdot AD \Rightarrow 3 \cdot AD + 5 \cdot AD = 480 \dots\dots\dots 1p$   
 $8 \cdot AD = 480 \Rightarrow AD = 60 \text{ mm} \dots\dots\dots 1p$   
 $BD = AB - AD \Rightarrow BD = 160 - 60 \Rightarrow BD = 100 \text{ mm} \dots\dots\dots 1p$
- b) Ordinea punctelor pe segmentul  $AB$  este  $A, D, C, B \dots\dots\dots 1p$

### PROBLEMA 4

În jurul punctului  $O$  considerăm unghiurile  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$ ,  $\angle DOE$ ,  $\angle EOF$  și  $\angle FOA$ , având măsurile  $b, c, d, e, f$ , respectiv  $a$ , exprimate în grade, cu  $a, b, c, d, e, f$  numere naturale nenule. Se știe că numerele  $a, b, c$  sunt direct proporționale cu 4,5,6, iar numerele  $c, d, e$  sunt invers proporționale cu 4,5,6. Determinați care este cea mai mică valoare posibilă pentru  $f$ .

(G.M. Nr 6-7-8/2024)

#### Barem:

- $\angle AOB = b$ ,  $\angle BOC = c$ ,  $\angle COD = d$ ,  $\angle DOE = e$ ,  $\angle EOF = f$  și  $\angle FOA = a$   
 Numerele  $a, b, c$  sunt direct proporționale cu 4,5,6  $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k, k > 0 \dots\dots\dots 1p$   
 $\Rightarrow a = 4 \cdot k, b = 5 \cdot k, c = 6 \cdot k \dots\dots\dots 1p$   
 Numerele  $c, d, e$  sunt invers proporționale cu 4,5,6  $\Leftrightarrow c \cdot 4 = d \cdot 5 = e \cdot 6 \dots\dots\dots 1p$   
 Dar,  $c = 6 \cdot k \Rightarrow d = \frac{24 \cdot k}{5}, e = 4 \cdot k \dots\dots\dots 1p$



Unghiurile  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$ ,  $\angle DOE$ ,  $\angle EOF$  și  $\angle FOA$  sunt unghiuri în jurul

punctului  $O \Rightarrow 5 \cdot k + 6 \cdot k + \frac{24 \cdot k}{5} + 4 \cdot k + f + 4 \cdot k = 360^\circ$  .....1p

$$5 \cdot k + 6 \cdot k + \frac{24 \cdot k}{5} + 4 \cdot k + f + 4 \cdot k = 360^\circ \quad / \cdot 5$$

$$\Rightarrow 119 \cdot k + 5 \cdot f = 360^\circ \cdot 5$$

$$\Rightarrow 5 \cdot f = 360^\circ \cdot 5 - 119 \cdot k^\circ \text{ .....1p}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1800^\circ - 119 \cdot k^\circ}{5}, f \text{ cea mai mică valoare posibilă}$$

$$\Rightarrow f = \frac{15^\circ}{5} \Rightarrow f = 3^\circ \text{ .....1p}$$