

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ -09 februarie 2025**

Clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

PROBLEMA 1

Se consideră suma $S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2024^2}{4047 \cdot 4049}$.

- Arătați că pentru orice $k \in N^*$ are loc egalitatea $\frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.
- Calculați suma S.
- Determinați partea întreagă a numărului real S.

Barem:

- Aducem la același numitor în interiorul parantezei și obținem

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2k+1-(2k-1)}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4k^2-1} = \frac{4k^2}{4(4k^2-1)} = \frac{k^2}{4k^2-1}, \text{ pentru orice}$$

$k \in N^*$ 2p

- În relația de la punctul a), atribuindu-i lui k valori de la 1 la 2024, obținem:

$$\text{pt } k = 1 \Rightarrow \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{pt } k = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

⋮

$$\text{pt } k = 2024 \Rightarrow \frac{2024^2}{4047 \cdot 4049} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4047} - \frac{1}{4049} \right)$$

$$S = 2024 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4047} - \frac{1}{4049} \right) \Rightarrow$$

.....1p

$$S = 506 + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{4049} \right) \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$S = 506 + \frac{1}{8} \cdot \frac{4048}{4049} \Rightarrow$$

$$S = 506 + \frac{506}{4049} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) [S] = \left[506 + \frac{506}{4049} \right] = 506 \dots\dots\dots 1p$$

PROBLEMA 2

Determinați numerele reale x, y, z , care verifică inegalitatea:

$$\frac{x+y+z}{2} + 7 \leq 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y-2025} + \sqrt{z+2025}.$$

Barem:

Condiții de existență: $x \geq 0, y - 2025 \geq 0, z + 2025 \geq 0$ 1p

Notăm $\sqrt{x} = a, \sqrt{y-2025} = b, \sqrt{z+2025} = c, a, b, c \geq 0$

$\Rightarrow a^2 = x, b^2 = y - 2025, c^2 = z + 2025$ 1p

Înlocuind în relația $\frac{x+y+z}{2} + 7 \leq 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y-2025} + \sqrt{z+2025}$, pe $x=a^2$,

$y = b^2 + 2025, z = c^2 - 2025 \Rightarrow$

$\frac{a^2+b^2+2025+c^2-2025}{2} + 7 \leq 2a + 3b + c \quad | \cdot 2$ 1p

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 14 \leq 4a + 6b + 2c \Leftrightarrow$ 1p

$a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 6b - 2c + 14 \leq 0 \Rightarrow$

$(a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 6b + 9) + (c^2 - 2c + 1) \leq 0$ 1p

Relația este posibilă $\Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = 4$

$(b-3)^2 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = 2034$

$(c-1)^2 = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow z = -2024$ 2p

PROBLEMA 3

Se dau patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB \perp (BCD)$ și $m(\angle CBD) = 120^\circ$.
Fie M mijlocul segmentului CD și N mijlocul segmentului BC . Să se demonstreze că
 $AM \perp BD$ dacă și numai dacă $BC = 2 \cdot BD$.

Barem:

Realizarea desenului corespunzător datelor problemei.....2p

Dacă $BD \perp AM$, atunci $BD \perp (AMB)$ deci $BD \perp BM \Rightarrow m(\angle CBM) = 30^\circ$ 1p

MN linie mijlocie în $\triangle CBD, MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp BM$ 1p

În $\triangle MNB$ avem: $NB = 2MN$ deci $BC = 2NB = 4MN = 2BD$1p

Reciproc: dacă $BC = 2BD$ avem $NB = 2MN$

$\Rightarrow m(\angle NBM) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle CBM) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle MBD) = 90^\circ$ 1p

Deci : $BD \perp (ABM) \Rightarrow BD \perp AM$1p

PROBLEMA 4

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A , iar punctul M exterior planului ABC astfel încât $MB \perp AB$, $MC \perp AC$. Fie N, P și E mijloacele segmentelor AM, BC , respectiv AC .

Stabiliți dacă:

- $PN \perp (ABC)$;
- $4 \cdot PN^2 = BM^2 - AC^2$.

Barem:

a) În $\triangle ABM$ dreptunghic în B

$$N \text{ mijlocul lui } MA \Rightarrow BN \text{ mediană} \xrightarrow{T. medianei} BN = \frac{AM}{2} \quad (1)$$

În $\triangle ACM$ dreptunghic în C

$$N \text{ mijlocul lui } AM \Rightarrow CN \text{ mediană} \xrightarrow{T. medianei} CN = \frac{AM}{2} \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1p$$

Din (1), (2) $\Rightarrow BN = CN \Rightarrow \triangle NBC$ isoscel de bază $BC \dots\dots\dots 1p$

$P \in (BC)$ astfel încât $PB = PC = \frac{BC}{2} \Rightarrow NP$ mediană în $\triangle NBC \Rightarrow NP$ înălțime $\Rightarrow NP \perp BC$.

Din $BN = NC$, $BN = AN = \frac{AM}{2} \Rightarrow AN = NC \Rightarrow \triangle NAC$ isoscel de bază AC , $E \in (AC)$, E mijlocul lui $AC \Rightarrow NE$ mediană $\Rightarrow NE$ înălțime $\Rightarrow NE \perp AC$ (3)

În $\triangle ABC$ avem : P mijlocul lui BC , E mijlocul lui $AC \Rightarrow PE$ linie mijlocie $\Rightarrow PE \parallel AB$, dar $AB \perp AC \Rightarrow AC \perp PE$ (4)

$\dots\dots\dots 1p$

Din (3), (4) $\Rightarrow AC \perp (NPE) \Rightarrow AC \perp NP$, $NP \subset (NPE)$, dar $NP \perp BC$, $AC, BC \subset (ABC)$

$\Rightarrow NP \perp (ABC)$

$\dots\dots\dots 1p$

a) În $\triangle NPB$ dreptunghic în $P \xrightarrow{T.P.} BN^2 = NP^2 + BP^2 \Rightarrow NP^2 = BN^2 - BP^2$
 $\dots\dots\dots 1p$

$$NP^2 = BN^2 - BP^2 = \left(\frac{AM}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Rightarrow NP^2 = \frac{AM^2}{4} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow$$

$$4 \cdot NP^2 = AM^2 - BC^2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } \triangle ABC \text{ dreptunghic în } A \xrightarrow{T.P.} BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$4 \cdot NP^2 = AM^2 - (AB^2 + AC^2) = AM^2 - AB^2 - AC^2$$

$$\text{În } \triangle ABM \text{ dreptunghic în } B \xrightarrow{T.P.} AB^2 = AM^2 - BM^2$$



$$4 \cdot NP^2 = AM^2 - (AM^2 - BM^2) - AC^2 = AM^2 - AM^2 + BM^2 - AC^2 \Rightarrow$$

$$4 \cdot NP^2 = BM^2 - AC^2 \dots\dots\dots 1p$$