

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ -09 februarie 2025  
Clasa a VIII-a**

**PROBLEMA 1**

Se consideră suma  $S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2024^2}{4047 \cdot 4049}$ .

- a) Arătați că pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$  are loc egalitatea  $\frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ .
- b) Calculați suma  $S$ .
- c) Determinați partea întreagă a numărului real  $S$ .

**PROBLEMA 2**

Determinați numerele reale  $x, y, z$ , care verifică inegalitatea:

$$\frac{x+y+z}{2} + 7 \leq 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y-2025} + \sqrt{z+2025}$$

**PROBLEMA 3**

Se dau patru puncte necoplanare  $A, B, C, D$  astfel încât  $AB \perp (BCD)$  și  $m(\angle CBD) = 120^\circ$ . Fie  $M$  mijlocul segmentului  $CD$  și  $N$  mijlocul segmentului  $BC$ . Să se demonstreze că  $AM \perp BD$  dacă și numai dacă  $BC = 2 \cdot BD$ .

**PROBLEMA 4**

Fie triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , iar punctul  $M$  exterior planului  $ABC$  astfel încât  $MB \perp AB, MC \perp AC$ . Fie  $N, P$  și  $E$  mijloacele segmentelor  $AM, BC$ , respectiv  $AC$ .

Stabiliți dacă:

- a)  $PN \perp (ABC)$ ;  
b)  $4 \cdot PN^2 = BM^2 - AC^2$ .

**Notă: Timp de lucru – 3 ore.**  
**Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.**  
**Nu se acordă puncte din oficiu.**  
**Toate subiectele sunt obligatorii.**