

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025**

Clasa a X-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1

Fie $x, a, b, c > 1$. Știind că numerele $\log_{bc} x, \log_{ac} x, \log_{ab} x$ sunt în progresie aritmetică, să se arate că numerele $(\log_x a)^2, (\log_x b)^2, (\log_x c)^2$ sunt în progresie aritmetică.

Barem.

$$2 \log_{ac} x = \log_{bc} x + \log_{ab} x \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{1}{\log_x b + \log_x c} + \frac{1}{\log_x a + \log_x b} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{2}{\log_x a + \log_x c} = \frac{\log_x a + 2 \log_x b + \log_x c}{(\log_x b + \log_x c)(\log_x a + \log_x b)} \dots\dots\dots 1p$$

Egalând produsele pe diagonală, după reduceri rezultă relația..... 2p

Problema 2

Fie $A = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2025} = i\}$ și $B = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{47} = -i\}$

a) Dacă $x \in B$, să se calculeze x^{2021} .

b) Să se determine $A \cap B$.

Barem

a) $x^{2021} = (x^{47})^{43} = (-i)^{43} = i \dots\dots\dots 2p$

b) Dacă $x^{2025} = i$ și $x^{2021} = i$ rezultă $x^4 = 1$ și $x \in \{1, -1, i, -i\} \dots\dots\dots 3p$

Dar $x = 1, x = -1, x = -i$ nu verifică ambele egalități, iar i le verifică.

$A \cap B = \{i\} \dots\dots\dots 2p$

Problema 3

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2), \forall x_1, x_2 \in (0, \infty).$$

a) Arătați că $f(1) = 0$;

b) Arătați că, dacă 1 este singura soluție a ecuației $f(x) = 0$, atunci funcția f este injectivă.

Barem

a) pentru $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ 2p

b) $0 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), \forall x \in (0, \infty)$ 2p

Fie $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$ 1p

$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2) = 0$ 1p

Cum 1 este singura soluție a ecuației $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă ... 1p

Problema 4

Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația:

$$|z| + |z - 1| + |z - 2| + \dots + |z - 2025| = 1013^2.$$

Barem

$|z| + |z - 2025| = |z| + |2025 - z| \geq |z + 2025 - z| = 2025$, cu egalitate atunci când $M(z) \in [A_0 A_{2025}]$, unde A_i are afixul i , $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2025\}$ 2p

Analog, $|z - 1| + |z - 2024| = |z - 1| + |2024 - z| \geq |z - 1 + 2024 - z| = 2023$,
cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}, z \in [1, 2024]$ 1p

Succesiv, $|z - 2| + |z - 2023| \geq 2021$, cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}, z \in [2, 2023]$ 1p

$|z - 1012| + |z - 1013| \geq 1$, cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}, z \in [1012, 1013]$ 1p

Adunând aceste inegalități, obținem

$|z| + |z - 1| + |z - 2| + \dots + |z - 2025| \geq 2025 + 2023 + \dots + 3 + 1 = 1013^2$ 1p

Egalitatea are loc în toate cele 1013 cazuri; Prin intersecție: $z \in \mathbb{R}, z \in [1012, 1013]$ 1p