

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025
Clasa a XII-a**

Problema 1

Fie grupul $(G, *)$, unde $G = (0,1)$ și legea de compoziție

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1} \quad \text{definită pe mulțimea } G.$$

a) Să se determine $a \in (0, \infty)$ astfel încât funcția $f: G \rightarrow (0, \infty)$,

$$f(x) = \frac{ax}{1-x} \text{ să fie izomorfism de la grupul } (G, *) \text{ la grupul } (\mathbb{R}_+, \cdot).$$

b) Să se arate că $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2025} = \frac{1}{2024!+1}$.

Problema 2

Se consideră matricele : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze Y^2 , Y^3 și Y^4 ;

b) Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \{A | A = I_3 + a \cdot Y + b \cdot Y^2, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Să se arate că înmulțirea matricelor este o lege de compoziție pe \mathcal{M} și că față de această lege de compoziție \mathcal{M} este grup comutativ.

Problema 3

Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

a) Să se arate că $\int_1^2 f(x) dx < \frac{1}{2} \ln 2$

b) Să se calculeze $a_n = \int_1^n f(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Problema 4.

Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \arctg x$.

a) Să se arate că f este strict crescătoare și $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{\int_0^x f(t) dt}} = \sqrt{2}$.

Notă: timp de lucru-3ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii.