

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 09 februarie 2025
Clasa a IX-a**

Problema 1

Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ care verifică relația $x + y + z = a$. Să se arate că

$$\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} < \frac{3a}{2}.$$

Problema 2

Să se rezolve în R ecuația

$$[2x] - [x] = 2x$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

Problema 3

Se consideră o mulțime M de numere reale care are următoarele două proprietăți:

(1) $1 \in M$

(2) Dacă $x \in M$ și $(x + 2y) \in M$, atunci $y \in M$

Arătați că:

a) $\frac{1}{4} \in M$

b) $\frac{1}{2^n} \in M$ pentru orice număr natural n .

Problema 4.

Fie ABC un triunghi și M un punct în interiorul triunghiului, iar G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC , respectiv MAB .

a) Arătați că $\overrightarrow{G_A G_B} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{G_B G_C} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{G_C G_A} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

b) Arătați că $\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0}$ dacă și numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Notă: timp de lucru-3ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii.