

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ -09 februarie 2025**  
**Clasa a V-a**  
**Barem de notare și evaluare**

**PROBLEMA 1**

Se dau numerele :

$$A = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{1985}, \quad B = (2^{993})^{1985} \text{ și } C = 2^{1986} \cdot 2^{1987} \cdot 2^{1988} \cdot \dots \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n$$

- a) Comparați numerele A și B.  
b) Determinați n știind că  $A \cdot C = (8^{667})^{1000}$

**Barem:**

- a)  $A = 2^{1985 \cdot 1986:2} = 2^{1985 \cdot 993} \dots\dots\dots 1p$   
 $B = 2^{993 \cdot 1985} \dots\dots\dots 1p$   
 atunci  $A=B \dots\dots\dots 1p$   
 b)  $A \cdot C = (2^3)^{667 \cdot 1000}$  echivalentă cu relația  $A \cdot C = 2^{2001 \cdot 1000} \dots\dots\dots 1p$   
 $A \cdot C = 2^{1+2+3+\dots+1985+1986+1987+\dots+n} = 2^{n(n+1):2} \dots\dots\dots 1p$   
 $n(n+1):2 = 2001 \cdot 1000 \Rightarrow n(n+1) = 2001 \cdot 2000 \dots\dots\dots 1p$   
 $n = 2000 \dots\dots\dots 1p$

**PROBLEMA 2**

Aflați suma numerelor  $\overline{abc}$  care verifică egalitatea:  $\overline{abc} - c \cdot \overline{ab} = \overline{ac}$ .

**Barem :**

Înlocuind în relația  $\overline{abc} - c \cdot \overline{ab} = \overline{ac}$  pe  $\overline{abc} = \overline{ab} \cdot 10 + c$  ,.....2p  
 obținem  
 $\overline{ab} \cdot 10 + c - c \cdot \overline{ab} = \overline{ac} \Rightarrow \overline{ab} \cdot 10 - c \cdot \overline{ab} = \overline{ac} - c \Rightarrow \overline{ab} \cdot (10 - c) = \overline{a0} \dots\dots\dots 2p$   
 Dar, a,b,c cifre,  $a \neq 0 \Rightarrow b=0$  și  $c=9$ .....1p  
 Deci,  $a = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ .....1p  
 $S = 109+209+309+\dots+909$   
 $S = 4581 \dots\dots\dots 1p$

### PROBLEMA 3

a) Scrieți numărul  $10^{11}$  ca sumă a patru cuburi perfecte.

(S.G.M. Nr. 10/2024 E 24248)

b) Arătați că numărul  $a = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{20}$  se împarte exact la 78.

(S.G.M. Nr. 10/2024 E 24246)

#### Barem:

a)  $10^{11} = 10^2 \cdot 10^9$  .....1p

$10^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \Rightarrow$  .....1p

$10^{11} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot 10^9 \Rightarrow 10^{11} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (10^3)^3 \Rightarrow$  .....1p

$10^{11} = (10^3 \cdot 1)^3 + (10^3 \cdot 2)^3 + (10^3 \cdot 3)^3 + (10^3 \cdot 4)^3$  .....1p

b)  $a = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8) + \dots (5^{17} + 5^{18} + 5^{19} + 5^{20})$  .....1p

$a = 780 + 5^4 \cdot 780 + \dots + 5^{16} \cdot 780$  .....1p

$a = 780 \cdot (1 + 5^4 + 5^8 + 5^{12} + 5^{16})$  se împarte exact la 78. ....1p

### PROBLEMA 4

Se consideră șirul de numere naturale: 57,74,65,61,..., în care fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu suma pătratelor cifrelor numărului precedent.

a) Scrieți următorii patru termeni ai șirului.

b) Fie S suma primilor 2024 de termeni ai șirului. Arătați că S nu este pătrat perfect.

#### Barem:

a)  $6^2 + 1^2 = 37$

$3^2 + 7^2 = 58$

$5^2 + 8^2 = 89$

$8^2 + 9^2 = 145$  .....2p

57,74,65,61, 37,58,89,145,42,20,4,16, 37,58,89,145,42,20,4,16, 37,58, ...  
8 termeni 8 termeni .....1p

$(2024-4):8 = 252 \text{ rest } 4$  .....1p

$S_{2024} = (57 + 74 + 65 + 61) + 252 \cdot (37 + 58 + 89 + 145 + 42 + 20 + 4 + 16) + 37$   
 $+ 58 + 89 + 145$

.....1p

$S_{2024} = 257 + 252 \cdot 411 + 329$

$S_{2024} = 104158$  .....1p

$u(S_{2024}) = 8 \Rightarrow S$  nu este pătrat perfect. ....1p