INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025
Clasa a XI-a

1. Se consideră șirul de numere reale $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = a \in (0,2)$ și $a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n}, \forall n \in N^*$.

a) (4p) Arătați că șirul este convergent.

b) (3p) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (7p) Fie $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^4 x_k + \sum_{k=1}^{n}\cos^4 x_k\right) = +\infty.$

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (3p) Determinați A^{2025}.

b) (4p) Rezolvați în $M_2(R)$ ecuația $AXA = I_2$.

4. Fie matricele $A, B \in M_3(C)$ și $\varepsilon \in C \setminus R$ o rădăcină de ordinul 3 a unității. Demonstrați că

$$\det(A+B) + \det(A+\varepsilon B) + \det(A+\varepsilon^2 B) = 3\left(\det(A) + \det(B)\right).$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.