INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025
Clasa a X-a

1. (7p) Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ astfel încât $f^2(x)+3f(x)=x^2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$. Arătați că funcția f este bijectivă și determinați funcția inversă.

2. (7p) Fie $z\in C$ cu $|z|=1$. Arătați că: $\sqrt{2}\le|1+z|+\left|1+z^2\right|\le 4$.

3. a) (3p) Demonstrați că $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$, pentru orice numere reale x,y,z.

b) (4p) Se consideră numerele reale $a,b,c\in(1,\infty)$, $abc=e$. Arătați că $a^{\ln b}b^{\ln c}c^{\ln a}\le\sqrt[3]{e}$.

4. (7p) Se consideră pătratul $A_1A_2A_3A_4$ înscris în cercul de rază 1 cu centru în O și punctul $P\in OA_1$, $OP>OA_1$.
Arătați că: $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{PA_k}>\frac{4}{OP}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.