Barem de corectare OLM 2025 Clasa a IX-a

P1

Inducție. P(0) adevărată	2p
P(k+1)	2p
Demonstrare P(k) implică P(k+1)	3p

P2 autor Marius Burtea

Presupunem prin absurd că există $x>0$ cu proprietatea din enunț.	1p
Avem $\left[n\left([x]+\{x\}\right)\right]$ impar $(\forall)n\in N^*\Leftrightarrow n[x]+\left[n\{x\}\right]$ impar $(\forall)n\in N^*$	2p
$\Rightarrow 2n[x]+\left[2n\{x\}\right]$ impar $(\forall)n\in N^*\Rightarrow\left[2n\{x\}\right]$ impar $(\forall)n\in N^*$	2p
Rezultă $2\{x\}\in[1,2),4\{x\}\in[3,4),6\{x\}\in[5,6)$..... Deducem: $2n\{x\}\in[2n-1,2n),(\forall)n\in N^*$	1p
Deci $2n\{x\}\geq 2n-1,\ (\forall)n\in N^*\Rightarrow n\leq\dfrac{1}{2\left(1-\{x\}\right)},\ (\forall)n\in N^*$, fals.	1p

P3 autor Călin Popa

Notăm $1-a=x,1-b=y,1-c=z\ 1+a=2-x=y+z,\ 1+b=x+z,\ 1+c=x+y$	2p
Inegalitatea devine: $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$	3p
inegalitate adevărată, întrucât: $x+y\geq 2\sqrt{xy}, y+z\geq 2\sqrt{yz}, z+x\geq 2\sqrt{zx}$	2p

P4 autor Petre Simion

a) Notăm $\dfrac{BA'}{A'C}=k$. Avem $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{k+1}$ și analoagele	2p
$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}\right)}{k+1}=\vec{0}$	1p
b) $\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{CB'}{B'A}\Rightarrow\dfrac{BC}{A'C}=\dfrac{AC}{B'A}\Rightarrow A'C=B'A$. Analog $A'C=C'B$	1p
Rezultă $\Delta ABB'\equiv\Delta BCC'\equiv\Delta CAA'(LUL)\Rightarrow\Delta AC''B'\equiv\Delta BA''C'\equiv\Delta CB''A'(ULU)$	1p
Notăm $\dfrac{A'B''}{AA'}=p$ și fie G centrul de greutate al triunghiului ABC	1p
$\overrightarrow{GA''}+\overrightarrow{GB''}+\overrightarrow{GC''}=\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{C'A''}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B''}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'C''}=$ $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}+p\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+p\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+p\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}+(1-p)\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)=\vec{0}$ Deci G este centrul de greutate al triunghiului $A''B''C''$	1p