Barem de corectare OLM 2025 Clasa a X-a

P1

Arătăm că există o funcție cu proprietatea din enunț. $\left(f(x)+\frac{3}{2}\right)^2=x^2+\frac{9}{4}$. Cum $x^2+\frac{9}{4}>0$ și $f(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, se obține $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2}$, $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$	3p
Pentru orice $y\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=y$ are o singură soluție în $(0,+\infty)$, $x=\sqrt{y^2+3y}$, rezultă că f este bijectivă deci inversabilă	3p
$f^{-1}:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+3x}$ este funcția inversă	1p

P2 – autor Aurel Doboșan (GM 6-7-8/2024)

Notăm $x=\lvert 1+z\rvert$, $x\in[0,2]$, $x^2=(1+z)(1+\bar{z})=2+2\operatorname{Re}(z)\Rightarrow\operatorname{Re}(z)=\frac{x^2-2}{2}$	2p
$\lvert 1+z^2\rvert^2=4(\operatorname{Re}(z))^2\Rightarrow\lvert 1+z^2\rvert=\lvert x^2-2\rvert$	2p
Considerăm funcția $f:[0,2]\to R$, $f(x)=x+\lvert x^2-2\rvert$ care are cea mai mică valoare $\sqrt{2}$ și cea mai mare valoare 4.	3p

P3 – autor Daniel Bischin elev CNGL Sibiu

a) Se efectuează calculele în inegalitatea dată și obținem $0\le x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$	1p
$0\le 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$	1p
$0\le(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, ceea ce este adevărat, deci inegalitatea este demonstrată	1p
b) Notăm cu L termenul din partea stângă a inegalității. $\ln L=\ln(a^{\ln b}b^{\ln c}c^{\ln a})=\ln(a^{\ln b})+\ln(b^{\ln c})+\ln(c^{\ln a})=\ln a\ln b+\ln b\ln c+\ln c\ln a$	2p
Înmulțind relația anterioară cu 3 și aplicând inegalitatea de la a) pentru numerele *lna, lnb* și *lnc,* obținem $3\ln L\le(\ln a+\ln b+\ln c)^2=\ln^2(abc)=\ln^2 e=1$	1p
Se obține că $L\le\sqrt[3]{e}$, adică ceea ce trebuia demonstrat	1p

P4

Considerăm în planul complex punctele $A_1(1), A_2(i), A_3(-1), A_4(-i)$ și $P(z)\in Ox$ cu $OP>1$	2p
$PA_1=\lvert z-1\rvert, PA_2=\lvert z-i\rvert, PA_3=\lvert z+1\rvert, PA_4=\lvert z+i\rvert$ cu $PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3\cdot PA_4=\lvert z^4-1\rvert$	1p
Cum $P\in Ox\Rightarrow\lvert z\rvert=z>1, z\in R$, se obține $\lvert z^4-1\rvert<z^4$.	1p
Din inegalitatea mediilor se obține că $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{PA_k}\ge\frac{4}{\sqrt[4]{PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3\cdot PA_4}}=\frac{4}{\sqrt[4]{\lvert z^4-1\rvert}}>\frac{4}{z}=\frac{4}{OP}$	3p