**Barem de corectare OLM 2025 Clasa a XII-a**

**P1**

| | |
|---|---|
| a) Funcția $t \to \cos(\cos t)$ este continuă pe $R \Rightarrow f$ derivabilă și $f'(x) = \cos(\cos x)$. Cum $\cos(x) \in [-1,1] \subset (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in R$. Deci $f$ e strict crescătoare și deci injectivă | 1p |
| Arătăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Se observă că $2\pi$ e o perioadă a funcției $g(t) = \cos(\cos t)$ și deci $f(x) = \int_1^{1+2\pi} g(t)dt + \int_{1+2\pi}^{1+4\pi} g(t)dt + ... + \int_{1+2(n-1)\pi}^{1+2n\pi} g(t)dt + \int_{1+2n\pi}^{x} g(t)dt$ unde *n* e cel mai mare număr natural pentru care $1+2n\pi \le x$. Cum $\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt = \lambda = ct.$ $\forall a \in R$ rezultă că $f(x) = n\lambda + \int_{1+2n\pi}^{x} g(t)dt \ge n\lambda$, căci *g* este pozitivă. Dacă $x \to \infty \Rightarrow n \to \infty \Rightarrow f \to \infty$ | 2p |
| La $-\infty$: $f(-x) = \int_1^{-x} \cos(\cos t)dt = -\int_{-1}^{x} \cos(\cos(-y))dy = -\int_{-1}^{x} \cos(\cos y)dy =$ $= -(\int_{-1}^{1} \cos(\cos y)dy + \int_1^x \cos(\cos y)dy) = -\int_{-1}^{1} \cos(\cos y)dy - f(x) = \alpha - f(x)$. Deci $f(-x) =$ $= \alpha - f(x)$ de unde rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ | 1p |
| $f^{-1}$ este derivabilă fiindcă $f$ este derivabilă și $f'(x) \ne 0, \forall x \in R$ | 1p |
| b). $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$; $f^{-1}(0)$ este soluția unică a ecuației $f(x) = 0 \Leftrightarrow \int_1^x \cos(\cos t)dt = 0$, adică $x = 1$. Deci $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{\cos(\cos 1)}$ | 2p |

**P2**

| | |
|---|---|
| Folosim propoziția: Dacă *H* e o submulțime finită a unui grup *G*, atunci *H* e subgrup $\Leftrightarrow$ *H* e parte stabilă. | 2p |
| În condițiile problemei, *G\H* e subgrup, deci conține elementul neutru, *e*. Dacă toate produsele elementelor din *H* s-ar găsi în *H*, atunci și *H* ar fi subgrup, adică ar conține pe *e*. Imposibil. | 5p |

**P3 Ion Ciudin, G.M 9/2024**

| | |
|---|---|
| **a)** În ipoteza că *e* ar fi elementul neutru, fie $x \in H, x \ne e$. Dacă $x < e \Rightarrow x < x * e < e \Rightarrow x < x < e.$ Imposibil. Analog, dacă $x > e$ se ajunge la contradicție. Deci nu există element neutru. | 1p |
| Dacă legea ar fi asociativă, ar avea loc proprietățile puterilor, adica $x^{(n)} * x^{(m)} = x^{(m)} * x^{(n)} = x^{(m+n)}$, unde $x^{(k)} = x * x * x .... * x$ de *k* ori. Dacă există $x \in H$ astfel încât $x < x^{(2)} \Rightarrow x < x * x^{(2)} < x^{(2)}$, adică $x < x^{(3)} < x^{(2)} \Rightarrow x < x^{(4)} < x^{(3)} < x^{(3)} * x^{(2)} < x^{(2)} \Rightarrow x < x^{(4)} < x^{(5)} < x^{(2)} \Rightarrow x < x * x^{(4)} < x^{(4)} < x^{(5)} \Rightarrow x^{(5)} < x^{(5)}$ contradicție. Analog dacă există *x* în *H* cu $x^{(2)} < x$. | 2p |
| Dacă $x^{(2)} = x, \ \forall x \in H$: Fie $x < y, \ x, y \in H \Rightarrow x < x * y < y \Rightarrow x < x * (x * y) < x * y$ și dacă legea ar fi asociativă, ar rezulta că $x < (x * x) * y < x * y \Rightarrow x < x * y < x * y$, contradicție. | 2p |
| b) Un exemplu este: $H = (0, \infty)$ și legea $x * y = \dfrac{x+y}{2}$ | 2p |

**P4**

| | |
|---|---|
| Se poate folosi formula $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1})(y)dy = bf(b) - af(a)$ dacă $f:[a,b] \to [c,d]$ este o funcție continuă și inversabilă, sau se face o schimbare de variabilă în una dintre integrale. De exemplu $arctg(\sin x) = t$ în prima integrală. Rezultă $x = \arcsin(tgt) \Rightarrow dx = \left(\arcsin\left(tgt\right)\right)'dt$ și după înlocuiri, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t(\arcsin(tgt)'dt = t\arcsin(tg(t)\|_0^{\pi/4} - I_2$. Rezultă că $I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{8}$ | 7p |