

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală - SĂLAJ -08.02.2025**

## BAREM DE NOTARE

## Clasa a VII-a

## Subiectul 1

1. (4p) a) Se consideră numerele:  $a = (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2})^2$ . Arătați că  $a = \sqrt{2} + 1$ .

(3p) b) Fie numărul natural  $a = 5^{2n} \cdot 144^{n+1} + 12^{2n} \cdot 25^{n+1}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că numărul  $\sqrt{a}$  este număr par,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a)  $a = (\sqrt{2}-1)(1+2\sqrt{2}+2) \dots\dots\dots 1p$

a=( $\sqrt{2}$ -1)(3+2 $\sqrt{2}$ ) .....1p

a=3√2+4-3-2√2.....1p

a=  $\sqrt{2}+1$ .....1p

b)  $a = 5^{2n} \cdot 12^{2n+2} + 12^{2n} \cdot 5^{2n+2} \dots 1p$

a=13<sup>2</sup>.5<sup>2n</sup>.12<sup>2n</sup> .....1p

$$\sqrt{a}=13 \cdot 5^n \cdot 12^n \text{ -număr par, } \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

## Subiectul 2

(5p) a) Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $x^2 = a$ , unde  $a = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$ .

(2p)b) Demonstrați că pentru orice număr natural  $n$ , următoarele numere sunt iraționale:

i)  $\sqrt{5n+3}$ ;                      ii)  $\sqrt{6^n+7}$ .

$$ii) \sqrt{6^n + 7}.$$

(5p) a)  $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{18 - \sqrt{128}} = \sqrt{\frac{18+14}{2}} - \sqrt{\frac{18-14}{2}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$

$$C = \sqrt{18^2 - 128} = \sqrt{196} = 14 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{18 + \sqrt{128}} = \sqrt{\frac{18+14}{2}} + \sqrt{\frac{18-14}{2}} = \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 4 - \sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} = 8 \dots\dots\dots 1p$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

(2p)b)

$$i) U(5n) \in \{0; 5\}; \forall n \in \mathbb{N}, U(5n + 3) \in \{3; 8\}; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5n + 3 \neq p^2 \Rightarrow \sqrt{5n + 3} \notin \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$$

$$ii) U(6^n) \in \{1; 6\}; \forall n \in \mathbb{N}, U(6^n + 7) \in \{8; 3\}; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6^n + 7 \neq p^2 \Rightarrow \sqrt{6^n + 7} \notin \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$$

### Subiectul 3

Fie ABCD un paralelogram,  $M \in AC$ , astfel încât  $AC = 3 AM$ .

2p a) Arătați că M este centrul de greutate al triunghiului ABD.

5p b) Dacă  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $DM \cap BC = \{N\}$  și  $AB \cap NO = \{P\}$ , aflați valoarea raportului  $\frac{OP}{PN}$ .

a)

Din  $AC = 3 AM$  obținem  $AM = \frac{1}{3}AC$ ,

O este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului, AO mediană și  $AO = \frac{1}{2}AC \dots\dots\dots 1p$

$AM = \frac{2}{3}AO$ , finalizare. .... 1p

b)

Fie  $\{Q\} = DM \cap AB$ , Q mijlocul segmentului AB. .... 1p

$\triangle AQD \equiv \triangle BQN$  (U.L.U.), .... 1p

$AD = BN$ , de unde  $BC = BN$ . .... 1p

În  $\triangle ACN$ -AB și NO mediane, concurente în punctul P,

P centru de greutate al triunghiului ACN, .... 1p

$$\frac{OP}{PN} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

#### Subiectul 4

În triunghiul  $ABC$  ducem înălțimea  $AD$ ,  $D \in BC$  și notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AB$  respectiv  $AC$ . Știind că punctele  $A, M, D, N$  sunt situate pe un cerc, aflați măsura unghiului  $\sphericalangle BAC$ .

(G.M 10/2024)

$DM$  mediană în triunghiul dreptunghic  $ABD \Rightarrow DM = \frac{AB}{2} = AM \Rightarrow$  triunghiul  $AMD$  este isoscel  
cu  $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle ADM$  ..... 1P

Analog,  $DN$  mediană în triunghiul dreptunghic  $ACD \Rightarrow DN = \frac{AC}{2} = AN \Rightarrow$  triunghiul  $AND$  este  
isoscel cu  $\sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle ADN$  ..... 1P

Cum  $A, M, D, N$  conciclice,  $AMDN$  este patrulater inscriptibil ..... 2p

$\sphericalangle MAN + \sphericalangle MDN = 180^\circ$ , ..... 1p

$\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle ADM$ ,  $\sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle ADN$  ..... 1p

$\Rightarrow \sphericalangle BAC = 90^\circ$  ..... 1p