

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ -08.02.2025
BAREM DE NOTARE

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \in (-2, 6)$ și $y \in (-5, 3)$. Arătați că numărul n este pătrat perfect, unde $n = \sqrt{(x + y - 9)^2} + \sqrt{(x + y + 7)^2}$

Soluție:

Știind că $-2 < x < 6$ și $-5 < y < 3$ se obține:

$$-16 < x + y - 9 < 0 \text{ și } 0 < x + y + 7 < 16 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } \sqrt{(x + y - 9)^2} = 9 - x - y \text{ și } \sqrt{(x + y + 7)^2} = x + y + 7 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin urmare se obține prin înlocuire } n = 16 = 4^2 \dots\dots\dots 1p$$

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$\sqrt{x^2 + 2x \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} \right) + \left(\frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025}.$$

Soluție:

Din relația dată putem scrie:

$$\sqrt{x^2 + 2x \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} \right) + \left(\frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{x^2 + 2x \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2025} \right) + \left(\frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x \cdot \left(\frac{2024}{2025} \right) + \left(\frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{2024}{2025} \right)^2} = \frac{4049}{2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(x + \frac{2024}{2025} \right) = \frac{4049}{2025}$$

$$x = \frac{4049}{2025} - \frac{2024}{2025}$$

$$x = 1 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2

Pentru n număr natural, definim mulțimea $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid |x + n - 6| \leq 3n + 4\}$.

a) Scrieți mulțimea A_1 sub formă de interval;

b) Aflați numărul natural n pentru care A_n conține exact 609 numere întregi.

Soluție:

a) $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid |x + 1 - 6| \leq 3 + 4\}$ 1p

$|x - 5| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq x - 5 \leq 7$ 1p

$\Rightarrow x \in [-2; 12]$ 1p

$\Rightarrow A_1 = [-2; 12]$ 1p

b) $|x + n - 6| \leq 3n + 4 \Leftrightarrow -3n - 4 \leq x + n - 6 \leq 3n + 4 \Rightarrow A_n = [-4n + 2; 2n + 10]$ 1p

$\Rightarrow 2n + 10 - (-4n + 2 - 1) = 609$ 1p

$\Rightarrow n = 100$ 1p

Subiectul 3

Fie $ABCD$ un tetraedru cu baza BCD triunghi echilateral iar G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD respectiv ACD .

a) Arătați că $G_1 G_2 \parallel (BCD)$.

b) Considerăm o dreaptă PQ , $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$ ce conține centrul bazei,

Arătați că $AC \parallel (G_1 PQ)$

Soluție:

a) Fie M mijlocul lui $AD \Rightarrow BM$ și CM sunt mediane în $\triangle ABD$, respectiv $\triangle ACD$

G_1 centrul de greutate al $\triangle ABD \Rightarrow \frac{MG_1}{MB} = \frac{1}{3}$ 1p

G_2 centrul de greutate al $\triangle ACD \Rightarrow \frac{MG_2}{MC} = \frac{1}{3}$ 1p

$\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MC} \Rightarrow G_1 G_2 \parallel BC, BC \subset (BCD) \Rightarrow G_1 G_2 \parallel (BCD)$ 2p

b) Fie N mijlocul lui $BD \Rightarrow \frac{NG_1}{NA} = \frac{1}{3}$ 1p

$$O \text{ centrul bazei } BCD \Rightarrow \frac{NO}{NC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{NG_1}{NA} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow G_1O \parallel AC \dots\dots\dots 1p$$

$$O \in PQ \Rightarrow G_1O \subset (G_1PQ), AC \parallel G_1O \Rightarrow AC \parallel (G_1PQ) \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4

Se consideră dreptele d_1 și d_2 și punctul O astfel încât $O \notin d_1$, $O \notin d_2$. Dreapta d_2 intersectează planul determinat de d_1 și O în punctul O_1 , iar dreapta d_1 intersectează planul determinat de d_2 și O în punctul O_2 . Arătați că punctele O, O_1, O_2 sunt coliniare

(Supliment G.M. 9/2024)

Soluție:

Fie $\alpha = (d_1, O)$ și $\beta = (d_2, O)$. Cum $O \in \alpha \cap \beta$ obținem ca $\alpha \cap \beta = d$ și $O \in d \dots\dots\dots 2p$

$d_2 \cap \alpha = \{O_2\}$, $d_2 \subset \beta$ obținem ca $O_2 \in \alpha \cap \beta \Rightarrow O_2 \in d \dots\dots\dots 2p$

$d_1 \cap \beta = \{O_1\}$, $d_1 \subset \alpha$ obținem ca $O_1 \in \alpha \cap \beta \Rightarrow O_1 \in d \dots\dots\dots 2p$

Cum O_1, O_2 și $O \in d$ obținem O_1, O_2 și O coliniare.....1p