

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ -08.02.2025

BAREM DE NOTARE

Clasa a V-a

Subiectul 1

Se consideră șirul de numere naturale 2, 7, 12, 17, 22, ..., în care fiecare termen, începând cu al doilea, este cu 5 mai mare decât precedentul.

- Aflați al 501-lea termen al șirului.
- Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Soluție:

- Primul termen este $2 = 5 \cdot 0 + 2$, al doilea termen este $7 = 5 \cdot 1 + 2$, al treilea termen este $12 = 5 \cdot 2 + 2$, al patrulea termen este $17 = 5 \cdot 3 + 2$, ș. a. m. d.2p
 $T_n = 5 \cdot (n - 1) + 2$ 1p
 $T_{501} = 5 \cdot (501 - 1) + 2 = 5 \cdot 500 + 2 = 2502$ 1p
- $S_{100} = (5 \cdot 0 + 2) + (5 \cdot 1 + 2) + (5 \cdot 2 + 2) + \dots + (5 \cdot 99 + 2) =$ 1p
 $= 5 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 99) + 2 \cdot 100 = 24950$ 2p

Subiectul 2

Două caiete, un pix și trei ciocolate costă 89 lei, iar patru caiete, șapte pixuri și o ciocolată costă 153 lei.

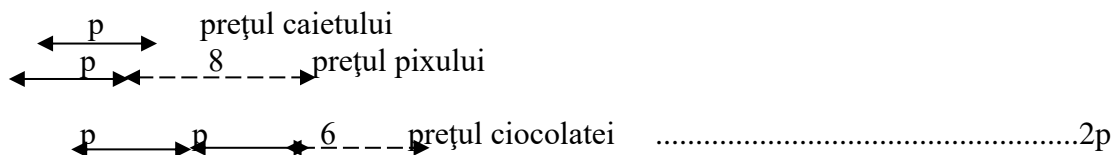
- Cât costă la un loc un caiet, un pix și o ciocolată?
- Cât costă fiecare dintre articole, știind că un pix costă mai mult cu 8 lei decât un caiet, iar o ciocolată costă cu 2 lei mai puțin decât caietul și pixul la un loc?

Soluție:

- | | | |
|------------|---|---------|
| 2 caiete |1 pix.....3 ciocolate.....89 lei | · 3 |
| 4 caiete |7 pixuri.....1 ciocolată.....153 lei | |
| → 6 caiete |3 pixuri.....9 ciocolate.....267 lei |2p |

Deci 10 caiete10 pixuri.....10 ciocolate.....420 lei
 \Rightarrow 1 caiet1 pix.....1 ciocolată.....42 lei2p

b)



$$4p + 8 + 6 = 42. \Rightarrow p = 7 \text{ lei}$$

Prețurile sunt 7, 15, 20 lei1p

Subiectul 3

a) Aflați numărul natural \overline{abcd} pentru care $\overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024$.

b) Se consideră numerele naturale

$$a = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{47}) + 3 \quad \text{și} \quad b = 4 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{23}) + 5$$

Determinați numărul natural k pentru care are loc relația $a \cdot b = 2025^k$.

Soluție:

$$a) \quad \overline{abcd} - 2 \cdot \overline{abc} = 2024 \Rightarrow 10 \cdot \overline{abc} + d - 2 \cdot \overline{abc} = 2024$$

$$8 \cdot \overline{abc} + d = 2024 \Rightarrow 8 \cdot \overline{abc} + d = 8 \cdot 253 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$8 \cdot (253 - \overline{abc}) = d \Rightarrow d \text{ poate lua valorile } 0 \text{ sau } 8$$

$$\text{Dacă } d = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 253, \text{ deci } \overline{abcd} = 2530$$

$$\text{Dacă } d = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 252, \text{ deci } \overline{abcd} = 2528. \quad \dots\dots\dots 2p$$

b)

$$S_1 = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{47} \quad / \cdot 3$$

$$3 \cdot S_1 = 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{47} + 3^{48}$$

$$\text{Deci } 3 \cdot S_1 - S_1 = 3^{48} - 3, \text{ cu } 2 \cdot S_1 = 3^{48} - 3 \quad a = 3^{48} - 3 + 3 = 3^{48} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$S_2 = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{23} \quad / \cdot 5 \quad 5 \cdot S_2 = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{23} + 5^{24}$$

$$\text{Deci } 5 \cdot S_2 - S_2 = 5^{24} - 5, \text{ cu } 4 \cdot S_2 = 5^{24} - 5 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$b = 5^{24} - 5 + 5 = 5^{24} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a \cdot b = 3^{48} \cdot 5^{24}. \text{ Cum } 2025 = 3^4 \cdot 5^2, \text{ rezultă } a \cdot b = 2025^{12} \text{ cu } k = 12 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4

Trei numere naturale nenule a, b, c se numesc *triolimpice* dacă au aceeași sumă a divizorilor lor naturali.

- Arătați că numerele 33, 35 și 47 sunt *triolimpice*.
- Verificați că numerele 66, 70 și 94 sunt *triolimpice*.
- Demonstrați ca există o infinitate de triplete de numere naturale *triolimpice*.

Soluție:

a) $1 + 3 + 11 + 33 = 1 + 5 + 7 + 35 = 1 + 47 = 48$1p

b) $D_{66} = 1; 3; 11; 33; 2; 2 \cdot 3; 2 \cdot 11; 2 \cdot 33$

$S_{66} = (1 + 3 + 11 + 33) + 2(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + 2)(1 + 3 + 11 + 33) = 3 \cdot 48$1p

$D_{70} = 1; 5; 7; 35; 2; 2 \cdot 5; 2 \cdot 7; 2 \cdot 35$

$S_{70} = (1 + 5 + 7 + 35) + 2(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + 2)(1 + 5 + 7 + 35) = 3 \cdot 48$1p

$D_{94} = 1; 47; 2; 2 \cdot 47$

$S_{94} = (1 + 47) + 2(1 + 47) = (1 + 2)(1 + 47) = 3 \cdot 48$, deci avem numere triolimpice1p

- c) Fie p un număr prim mai mare decât 47.

Vom arăta că numerele $p \cdot 33$, $p \cdot 35$ și $p \cdot 47$ sunt triolimpice.

$D_{p \cdot 33} = 1; 3; 11; 33; p; p \cdot 3; p \cdot 11; p \cdot 33$

$S_{p \cdot 33} = (1 + 3 + 11 + 33) + p(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + p)(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + p) \cdot 48$..1p

$D_{p \cdot 35} = 1; 5; 7; 35; p; p \cdot 5; p \cdot 7; p \cdot 35$

$S_{p \cdot 35} = (1 + 5 + 7 + 35) + p(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + p)(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + p) \cdot 48$1p

$D_{p \cdot 47} = 1; 47; p; p \cdot 47$

$S_{p \cdot 47} = (1 + 47) + p(1 + 47) = (1 + p)(1 + 47) = (1 + p) \cdot 48$.

Cum există o infinitate de numere prime mai mare decât 47 rezultă că există o infinitate de triplete de numere *triolimpice*1p