

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ -08.02.2025

BAREM DE NOTARE

Clasa a VI-a

Subiectul 1

Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ număr prim mai mic decât } 15\}$ și
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \text{ este cifră}\}$. Arătați că are loc egalitatea:
 $\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$, unde $\text{card}(M)$ este numărul elementelor mulțimii M .

Soluție:

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 1p

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ 1p

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 1p

$A \cap B = \{2, 3\}$ 1p

$\text{card}(A) = 6$ și $\text{card}(B) = 4$ 1p

$\text{card}(A \cup B) = 8$ și $\text{card}(A \cap B) = 2$ 1p

$6 + 4 = 8 + 2$ 1p

Subiectul 2

Fie a, b și c trei numere naturale prime și distincte, astfel ca $4a + 6b + 9c = 105$.

a) Determinați valorile lui a, b și c .

b) Dacă n este un număr natural impar, atunci arătați că numărul $2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

2)a) $a : 3 \rightarrow a = 3$ 1p

$2b + 3c = 31 \rightarrow 3c \leq 31 \rightarrow c \in \{2; 3; 5; 7\}$ 1p

c impar, $c \neq a \rightarrow c \in \{5; 7\}$ 1p

$c = 5 \rightarrow b = 8$ compus

$c = 7 \rightarrow b = 5$

S: $a = 3; b = 5; c = 7$ 1p

b) $n = 2k + 1 \rightarrow 2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a} = 2^{2k+8} - 2^{2k+6} + 2^{2k+4}$ 1p
 $= 2^{2k+4}(2^4 - 2^2 + 1) = (2^{k+2})^2 \cdot 13 = (2^{k+2})^2 \cdot (2^2 + 3^2)$ 1p
 $= (2^{k+3})^2 + (2^{k+2} \cdot 3)^2$ 1p

Subiectul 3

- a) Fie punctele coliniare A, B, C, D pe dreapta d, în această ordine, astfel încât AC și BD să fie congruente, iar BC=5cm și AD=17 cm. Dacă P este simetricul mijlocului segmentului AB față de A și Q este simetricul mijlocului segmentului CD față de D, aflați lungimea segmentului PQ.

Soluție:

$AC \equiv BC \Leftrightarrow AB \equiv CD$; AB=x, atunci $2x + 5 = 17 \Rightarrow x = 6$1p

Fie M mijlocul lui AB și N mijlocul lui CD. Atunci AM=DN=3cm

P simetricul mijlocului segmentului AM față de A, PA=AM=3cm, iar Q simetricul mijlocului segmentului CD față de punctul D \Rightarrow DN=CN=3cm.....1p

PQ=PA+AD+DQ=3+17+3=23cm.....1p

- b) Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare . Fie OX și OY bisectoarele acestora. Dacă $\angle BOY \in \mathbb{N}^*$ și $\angle COX = p \cdot \angle BOY$, unde p este un număr prim, aflați p.

Soluție:

Fie $\angle BOY = k \in \mathbb{N}^*$, $\Rightarrow \angle COX = pk$,

$\angle BOX = \angle AOX = pk - 2k$ 1 p

$2(pk - 2k) + 2k = 180^\circ$, $pk - 2k + k = 90^\circ$ 1 p

$k(p - 1) = 90^\circ$, p prim, $(p; k) \in \{(3, 45^\circ), (7; 15^\circ), (11; 9^\circ), (19; 5^\circ), (31; 3^\circ), \}$2 p



Subiectul 4

(7p) Se dă un cerc cu centrul în punctul O. Punctele C, M, D și N sunt situate pe cerc în această ordine, măsura arcului \widehat{CD} fiind 148° , iar diametrul MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$. Aflați măsurile unghiurilor la centru $\sphericalangle CON$ și $\sphericalangle DOM$.

Soluție:

Figura conform enunțului.....1p

$\widehat{CD} = \sphericalangle COD = 148^\circ$ 2p

$\sphericalangle COM = \sphericalangle DOM = 148:2 = 74^\circ$ 2p

$\sphericalangle DOM = 74^\circ$ 1p

$\sphericalangle CON = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$ 1p